A. Heyting

Introducción al intuicionismo

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS - MADRID

ESTRUCTURA Y FUNCION

El porvenir actual de la Ciencia

Colección dirigida por ENRIQUE TIERNO GALVAN

1. Quentin Gibson: *La lógica de la investigación social.*
2. M. F. Ashley Montagu: *La dirección del desarrollo humano* (2.ª ed.).
3. Gustav Bergmann: *Filosofía de la ciencia.*
4. Christian Bay: *La estructura de la libertad.*
5. Ernest Nagel: *La lógica sin metafísica.*
6. David Hilbert y Wilhelm Ackermann: *Elementos de lógica teórica* (2.ª ed.).
7. Vernon Van Dyke: *Ciencia y política: un análisis filosófico.*
8. Karl R. Popper: *La lógica de la investigación científica* (2.ª ed.).
9. R. M. Martin: *Verdad y denotación.*
10. Ernest Gellner: *Palabras y cosas.*
11. C. O. Broad: *El pensamiento científico.*
12. John Hospers: *La conducta humana.*
13. Arthur Pap: *Teoría analítica del conocimiento.*
14. T. C. Schelling: *La estrategia del conflicto.*
15. Richard B. Braithwaite: *La explicación científica.*
16. Milic Capek: *El impacto filosófico de la física contemporánea.*
17. Ros Ashby: *Proyecto para un cerebro.*
18. Hans Reichenbach: *Moderna filosofía de la ciencia.*
19. George Polya: *Matemáticas y razonamiento plausible.*
20. George L. S. Shackle: *Decisión, orden y tiempo.*
21. D. M. Armstrong: *La percepción y el mundo físico.*
22. Ernest Nagel: *Razón soberana.*
23. Max Black: *Modelos y metáforas.*
24. Haskell B. Curry y Robert Feys: *Lógica combinatoria.*
25. Ludwig Wittgenstein: *Los cuadernos azul y marrón.*
26. Abraham Edel: *El método en la teoría ética.*
27. Alfred Landé: *Nuevos fundamentos de la mecánica cuántica.*
28. Jean Ladrière: *Limitaciones internas de los formalismos.*
29. N. Wiener y J. P. Schadé: *Sobre modelos de los nervios, el cerebro y la memoria.*
30. G. H. von Wright: *Normas y acción.* Una investigación lógica.
31. E. Nagel y J. P. Newman: *El teorema de Gödel.*
32. Henry Margenau: *La naturaleza de la realidad física.* Una filosofía de la Física moderna.
33. V. C. Chappell: *El lenguaje común.* Ensayos de filosofía analítica.
34. Alf Ross: *Lógica de las normas.*
35. W. Sellars: *Ciencia, percepción y realidad.*
36. Christian Thiel: *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege.*
37. Claude Flament: *Teoría de grafos y estructuras de grupo.*
38. W. y M. Kneale: *El desarrollo de la lógica.*
39. G. E. Hughes y M. J. Cresswell: *Introducción a la lógica modal.*
40. Karl R. Popper: *Conocimiento objetivo.*
41. Gottlob Frege: *Escritos lógico-semánticos.*
42. Stephen C. Kleene: *Introducción a la Metamatemática.*
43. G. Kalinowski: *Lógica del discurso normativo.*
44. J. J. C. Smart: *Entre Ciencia y Filosofía.* Una introducción a la Filosofía de la Ciencia.
45. C. Truesdell: *Ensayos de Historia de la Mecánica.*

INTRODUCCION AL INTUICIONISMO

ESTRUCTURA Y FUNCION
EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

A. Heyting

INTRODUCCION AL INTUICIONISMO

EDITORIAL TECNOS

MADRID

Los derechos para la versión castellana de la obra
INTUITIONISM. An Introduction, 3.ª ed. 1971,
publicada por North-Holland Publishing Company, Amsterdam,
son propiedad de Editorial Tecnos, S. A.

Traducción por
VICTOR SANCHEZ DE ZAVALA

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1976
O'Donnell, 27. Madrid - 9
I.S.B.N. 84-309-0632-0
Depósito legal: M. 13.406 - 1976

Printed in Spain - Impreso en España por Gráficas Lormo - Isabel Méndez, 15 - Madrid-18
en papel Offset editorial de Torras Hostench, S. A.

INDICE

Pág.

PREFACIO 9

I. UNA DISPUTACION 13

II. ARITMETICA 23
1. Los números naturales 23
2. Los generadores de número real 25
3. Los números reales respetables 37
4. Los límites de las sucesiones de generadores de número real 39

III. LOS DESPLIEGUES Y LAS ESPECIES 41
1. Los despliegues 41
2. Las especies 46
3. Aritmética de los números reales 49
4. La continuidad y la inducción trabada de los despliegues 50

IV. ALGEBRA 59
1. Los campos algebraicos 59
2. Las ecuaciones lineales 61
3. La dependencia lineal 64

V. LAS ESPECIES PUNTUALES PLANAS 67
1. Nociones generales 67
2. Las especies puntuales situadas 74

VI. MEDIDA E INTEGRACION 79
1. Las regiones medibles y los complementos de región 79
LA INTEGRAL DE BROUWER 84
2. Las funciones medibles acotadas 84
3. Las especies puntuales medibles 91
4. La integral como medida de las especies puntuales 95
5. Las funciones no acotadas 97
6. El espacio de Hilbert 103
7. La derivación 109

VII. LOGICA 111
1. Cálculo proposicional 111
2. Cálculo de predicados de primer orden 116
3. Aplicaciones 119

VIII. TEMAS CONTROVERTIDOS 129
1. Las sucesiones prolongadas infinitamente que dependen de la solución de algún problema 129
2. La matemática sin negación 133

BIBLIOGRAFIA 137

INDICE DE MATERIAS 149

GLOSARIO DE SIMBOLOS 151

PREFACIO

Con objeto de evitar que el lector pierda el tiempo haciendo inútiles tentativas por resolver presuntos acertijos, he de advertirle que los personajes del diálogo no son caricaturas de personas algunas, ni vivas ni fallecidas, ni mucho menos dobles suyos: son ganchos de los que colgar ideas, y nada más. En cierta medida esto es verdad incluso en el caso de In, el personaje que representa la postura intuicionista, ya que, en beneficio de la claridad, le he hecho hablar a veces de una manera más absoluta de lo que debería si hubiese expresado sin restricción mis propias opiniones. Por lo demás, el debate se confina estrictamente al intuicionismo: sólo toco otras concepciones de las matemáticas en la medida en que llevan a objeciones contra aquella postura; así pues, rechazo todo reproche que pudiera hacérseme de haber representado en forma incompleta otros puntos de vista.

Era necesario presentar las demostraciones con mucho detalle, incluso cuando su diferencia con las clásicas, perfectamente conocidas, residía sólo en algunas pequeñas adiciones; en efecto, no había otra manera de indicar en qué puntos era preciso insertar éstas. A medida que avanzaba el libro, y que cabía suponer que el lector fuese adquiriendo cierta sensibilidad para las dificultades de índole específicamente intuicionista, he ido adoptando gradualmente un estilo más comprimido.

Estoy muy agradecido a cuantos han contribuido a mejorar esta obra, entre ellos el Dr. Paul Gilmore, el profesor Leon Henkin y el Sr. William Tait, que han leído ciertas partes del manuscrito y me han sugerido muchos retoques lingüísticos, así como a los señores J.J. de Iongh y F. van de Oudeweetering, que lo han revisado cuidadosamente; el Sr. de Iongh me ha indicado además la necesidad de efectuar muchas correcciones y aclaraciones del texto.

En muchos lugares del libro el lector se hallará frente a razonamientos pasados de moda, carentes de generalidad y más desmañados que los métodos modernos. Ello se debe a diversas razones: en primer lugar, los métodos muy poderosos suelen valerse excesivamente de demostraciones indirectas, de suerte que es casi imposible introducirlos en las matemáticas intuicionistas; y en segundo lugar, las teorías modernas muy generales emplean el método axiomático; ahora bien, éste sólo puede funcionar bien si existen teorías concretas, a partir de las cuales pueda construirse por generalización la teoría axiomática. (Por ejemplo, sólo ha podido ponerse a punto la topología general tras conocer con cierto pormenor la de los espacios euclídeos.) De hecho, no se ha investigado casi ninguna parte de la matemática intuicionista lo suficientemente a fondo para

admitir la construcción de una teoría axiomática general; por consiguiente, he tenido que limitarme al caso más elemental de la integración; y cuando sepamos de ésta más de lo que actualmente sabemos, será posible construir una teoría axiomática al respecto. Incluso en el caso del álgebra, en el que sería posible axiomatizar ya ahora, me ha parecido mejor tratar un ejemplo concreto, el del campo de los números reales, teniendo en cuenta el hecho de que esta obra pretende ser una introducción.

Es probable que en algunos casos haya empleado métodos anticuados por no conocer los modernos. Ahora bien, una de las finalidades de este libro es la de capacitar a los matemáticos en activo para que solventen la cuestión de cuáles de los resultados que obtengan pueden demostrarse intuicionísticamente; pues el intuicionismo sólo podrá florecer si los matemáticos que trabajan en los distintos campos llegan a interesarse activamente por él y a hacer aportaciones a él: para edificar una rama determinada de la matemática intuicionista es necesario, en primer término, poseer un conocimiento a fondo de la rama correspondiente de la matemática clásica, y en segundo, saber por experiencia dónde se encuentran los piélagos intuicionistas. En la presente obra trato de enseñar esto último; y espero que algunos de mis lectores se ocupen de los detalles más satisfactoriamente de lo que yo podría hacerlo, o que traten intuicionísticamente otras teorías. El objeto de las "lecturas recomendadas" es el de ayudarles, ya que indican los trabajos intuicionistas más importantes acerca de algunos temas especiales. (*)

Las referencias internas están hechas del siguiente modo:
"Teor. 2" se refiere al teorema 2 del mismo apartado;
"Def. 2" se refiere a la definición 2 del mismo apartado;
"6.2.1, Teor. 2" se refiere al teorema 2 del apartado 6.2.1.

Amsterdam, agosto de 1955. A. HEYTING

PREFACIO DE LA SEGUNDA EDICION

En esta reimpresión únicamente he introducido cambios y adiciones de escasa importancia: sólo he redactado parcialmente de nuevo el apartado 6.5. Podría haber sido tentadora la idea de añadir algunos capítulos sobre las relaciones entre el intuicionismo y la teoría de las funciones recursivas, así como sobre las que guarda con las recientes investigaciones rusas acerca del análisis constructivo; sin embargo, me ha parecido mejor que el contenido se limitase a un solo tema.

Amsterdam, marzo de 1965 A. HEYTING

PREFACIO DE LA TERCERA EDICION

Durante los últimos años los trabajos realizados sobre la teoría de las sucesiones electivas han impulsado mucho el estudio del intuicionismo. No he tratado el tema pormenorizadamente, ya que se encuentra aún en un estado de desarrollo, pero he mencionado la bibliografía más importante en el apartado 3.4.2. Además, he refundido el apartado 3.4, valiéndome para ello de un manuscrito de A. S. Troelstra que este autor ha escrito con tal finalidad; y le estoy agradecidísimo por haberlo hecho. Las notas añadidas por A.A. Markov a la traducción rusa de la primera edición me han sugerido muchas correciones de menor cuantía.

A. HEYTING

Castricum, junio de 1970

I. UNA DISPUTACION

(Personajes del diálogo: Clas, For, In, Let, Prag y Sig.)

CLAS. ¿Cómo está usted, Sr. In? ; ¿no se ha escapado al campo en un día de verano tan hermoso?

IN. Se me habían ocurrido algunas ideas, y he estado trabajando sobre ellas en la biblioteca.

CLAS. ¡Qué laboriosa abeja! ¿Y cómo le ha ido la cosa?

IN. Perfectamente. ¿Tomamos una copa?

CLAS. Gracias. Estoy seguro de que ha estado trabajando sobre esa diversión suya, el rechazo del tercio excluso y todas esas cosas. Nunca he comprendido por qué podríamos fiarnos de la lógica en todo lo demás, pero no en las matemáticas.

IN. Ya hemos hablado de eso mismo otras veces. En varias ocasiones se ha estudiado la idea de que para la descripción de ciertos tipos de objetos puede ser más adecuada otra lógica, en vez de la usual; pero fue Brouwer quien descubrió antes que nadie un objeto que realmente exige una forma distinta de lógica, a saber, la construcción mental matemática [L.E.J. Brouwer 1908]; y la razón es que, en matemáticas, desde el comienzo mismo tratamos de lo infinito, mientras que la lógica corriente está hecha para razonar acerca de colecciones finitas.

CLAS. Lo sé; pero a mi entender la lógica es universal, y se aplica a lo infinito tanto como a lo finito.

IN. Debería usted tener en cuenta cuál era el programa de Brouwer [L.E.J. Brouwer 1907]: consistía en investigar las construcciones mentales matemáticas como tales, sin hacer referencia a cuestión alguna acerca de la naturaleza de los objetos construidos, tal como la de si existen independientemente de nuestro conocimiento de ellos. Y que este punto de vista conduce inmediatamente a rechazar el principio del tercio excluso es algo que como puedo mostrarlo mejor es con un ejemplo.

Comparemos dos definiciones de números naturales, k y 1, por ejemplo.

I. k es el mayor número primo tal que $k - 1$ sea también primo, y $k = 1$ en caso de que no exista tal número.

II. 1 es el mayor número primo tal que $1 - 2$ sea también primo, y $1 = 1$ en caso de que no exista tal número.

La matemática clásica desdeña completamente la obvia diferencia de carácter entre estas dos definiciones; pues es posible calcular realmente k ($k = 3$), mientras que no tenemos método alguno de calcular 1, ya que no se sabe si la sucesión de pares de primos

gemelos, $p, p + 2$, es finita o no. De ahí que los intuicionistas rechacen II como definición de un entero: consideran que sólo está bien definido un número entero cuando se da un método para calcularlo; ahora bien, este modo de razonar lleva a rechazar el principio del tercio excluso, ya que si la sucesión de números primos gemelos fuese o finita o infinita, II definiría un entero.

CLAS. A eso puede objetarse que el grado de nuestros conocimientos acerca de la existencia o no existencia del último par de primos gemelos es puramente contingente, y carece de trascendencia para las cuestiones relativas a la verdad matemática. O bien existe una infinidad de tales pares, caso en que será $1 = 1$ o su número es finito, y entonces 1 será igual al mayor primo tal que $1 - 2$ sea también primo; así pues, en cualquier caso concebible 1 está definido: ¿qué importa que podamos o no calcularlo realmente?

IN. El argumento que emplea usted es de índole metafísica: si "existir" no significa "haberse construido", ha de poseer un significado metafísico; y no puede ser la incumbencia de la matemática investigar semejante sentido ni solventar si es sostenible o insostenible. No tenemos objeción alguna que hacer a ningún matemático que admita en su fuero interno la teoría metafísica que le plazca, pero el programa de Brouwer entraña que estudiemos las matemáticas como algo más simple e inmediato que la metafísica: en el sentido de las construcciones mentales matemáticas, "existir" tiene que ser sinónimo de "haberse construido".

CLAS. Eso es decir que, mientras no sepamos si existe o no un último par de primos gemelos, II no será una definición de un entero, pero que en cuanto se resuelva tal problema se convertirá repentinamente en semejante definición. Supongamos que el 1 de enero de 1976(1) se demuestre que existe una infinidad de primos gemelos; a partir de ese momento, $1 = 1$; pero antes de esa fecha, *¿era* $1 = 1$ o no? [Menger 1930].

IN. Toda aserción matemática afirma el hecho de que se haya efectuado cierta construcción matemática; y no cabe duda de que antes de realizar la construcción no se la había realizado. Aplicando esta observación a su ejemplo, vemos que antes del 1 de enero de 1975 no se habría demostrado que $1 = 1$. Pero no era esto a lo que usted se refería: me parece que para aclarar el sentido de su pregunta tiene que apelar de nuevo a conceptos metafísicos, a cierto mundo de objetos matemáticos que existiesen independientemente de nuestro conocimiento de ellos, y en el que "$1 = 1$" sería verdad en cierto sentido absoluto; ahora bien, repito que las matemáticas no deberían depender de conceptos tales como ese. En realidad, todos los matemáticos (incluso los intuicionistas) están convencidos de que en cierto sentido las matemáticas se refieren a verdades eternas; pero cuando trata uno de definir con precisión tal sentido se enreda uno en un laberinto de dificultades metafísicas; y la única forma de evitarlas es proscribirlas de las matemáticas. A esto es a lo que me refería al decir que estudiemos las construcciones matemáticas como tales, y que para tal estudio la lógica clásica es inadecuada.

CLAS. Aquí vienen nuestros amigos For y Let. Muchachos, estamos teniendo una discusión interesantísima sobre el intuicionismo.

LET. ¿Podrías acaso hablar de algo distinto con este bueno de Int? : Está completamente sumergido en él.

IN. Una vez que le ha impresionado a uno la belleza de un tema, ¿por qué no dedicarse a él de por vida?

FOR. Totalmente de acuerdo. Lo único que me pregunto es cómo puede haber belleza alguna en algo tan indefinido como el intuicionismo: ninguno de los términos que utilizan ustedes está bien definido, ni dan reglas de deducción exactas; con lo cual no sale uno jamás de dudas en cuanto a qué razonamientos son correctos y cuáles no [R. Carnap 1934, p. 41; 1937, p. 46] [W. Dubislav 1932, p. 57 y 75]. En el habla cotidiana ninguna palabra tiene un significado perfectamente fijado: siempre hay cierta holgura con la que puede jugarse, y tanto mayor es ésta cuanto más abstracto sea el concepto; esto hace que la gente no capte lo que quiere decir el otro; y lo mismo sucede en los razonamientos matemáticos no formalizados. La única manera de lograr un rigor absoluto es abstraer todo significado de los enunciados matemáticos y atender a ellos por sí mismos, como sucesiones de signos, dejando de lado el sentido que puedan transmitir: entonces es posible formular unas reglas definidas para deducir enunciados nuevos de los que ya se tengan y evitar las incertidumbres que proceden de la ambigüedad del lenguaje.

IN. Para mí, la diferencia entre formalistas e intuicionistas es principalmente cuestión de gustos. Ustedes emplean también los razonamientos que atienden al significado, en lo que Hilbert llamaba metamatemática; pero su objetivo es separar tales razonamientos de la matemática puramente formal y limitarse a los más sencillos que sea posible. Nosotros, por el contrario, no nos interesamos por el lado formal de las matemáticas, sino precisamente por ese tipo de razonamiento que aparece en la metamatemática, y tratamos de desarrollarlo hasta sus últimas consecuencias; preferencia que surge de la convicción de que ahí tenemos una de las facultades más fundamentales de la mente humana.

FOR. Si no se mete usted con el formalismo, tampoco lo haré yo con el intuicionismo. Pues los formalistas son de los seres humanos más pacíficos que hay: cabe formalizar cualquier teoría, que de este modo se convierte en objeto de nuestros métodos; en cuanto a la matemática intuicionista, también puede tratársela de este modo, y así se hará [R. Carnap 1934, p. 44; 1937, p. 51].

CLAS. O sea, habría que estudiar la matemática intuicionista como parte de las matemáticas. En éstas investigamos las consecuencias de unos supuestos dados; y los supuestos intuicionistas pueden ofrecer gran interés, pero no tienen derecho a monopolio alguno.

IN. Tampoco lo pretendemos: nos contentamos con que ustedes admitan el derecho que asiste a nuestra concepción. Sin embargo, tengo que protestar contra la aserción de que el intuicionismo parta

de unos supuestos definidos y más o menos arbitrarios: el tema de que se ocupa, el pensamiento matemático constructivo, determina unívocamente sus premisas y lo coloca junto a las matemáticas clásicas, que estudian otro tema (cualquiera que pueda ser éste), no en el interior de ellas; por esta razón, también es imposible un acuerdo entre el formalismo y el intuicionismo mediante la formalización de las matemáticas intuicionistas. Es cierto que incluso en éstas puede formalizarse la parte acabada de una teoría; pero conviene que reflexionemos un momento sobre el significado de semejante formalización: podemos considerar el sistema formal obtenido como la expresión lingüística del pensamiento matemático en un lenguaje especialmente apropiado.

Si adoptamos este punto de vista chocamos con el obstáculo de la fundamental ambigüedad del lenguaje: como no se puede jamás fijar el significado de una palabra con la suficiente precisión para excluir toda posibilidad de mala inteligencia, no podremos estar nunca matemáticamente seguros de que el sistema formal exprese certeramente nuestros pensamientos matemáticos.

Adoptemos, sin embargo otro punto de vista. Podemos considerar el propio sistema formal como una estructura matemática sumamente sencilla, cuyas entidades (los signos del sistema) están vinculados a otras estructuras matemáticas, frecuentemente muy complicadas; de este modo es posible llevar a cabo formalizaciones dentro de la matemática, que se convierten en una herramienta matemática muy poderosa. Desde luego, nunca se está seguro de que el sistema formal represente plenamente dominio alguno del pensamiento matemático: en todo momento, el descubrimiento de nuevos métodos de razonar puede obligarnos a ampliar dicho sistema.

FOR. Hace varios años que nos es conocida esta situación; pues el teorema de incompletitud de Gödel nos ha hecho ver que es posible ampliar coherentemente de diversas maneras cualquier sistema formal coherente de la teoría de números.

IN. La diferencia es que el intuicionismo avanza con independencia de la formalización, que no puede hacer otra cosa que seguir a la construcción matemática.

CLAS. Lo que me causa mayor perplejidad es que ustedes dos parecen igualmente partir de nada en absoluto: parecen estar construyendo castillos en el aire. ¿Cómo saben que su manera de razonar es firme sin tener a su disposición el infalible criterio proporcionado por la lógica? Ayer hablé con Sig, que es todavía más relativista que ninguno de los dos: tan resbaladizo es que no hay argumento alguno que haga presa en él, y jamás llega a ninguna conclusión algo sólida; temo que éste sea el destino de quienquiera renuncie al apoyo de la lógica, o sea, del sentido común.

SIG. Hablando del ruin de Roma, por la puerta asoma. ¿Estaba usted hablando mal de mí?

CLAS. Aludía a nuestra discusión de ayer; hoy me dedico a atacar a estos otros dos condenados relativistas.

SIG. Me gustaría mucho acompañarle en esa ocupación, pero

oigamos primero lo que replican nuestros adversarios. Aquí les presento a mi amigo Prag, a quien le interesará nuestro debate.

FOR. ¿Cómo está usted? ¿Es usted también un filósofo de la ciencia?

PRAG. Odio la metafísica.

IN. ¡Bienvenido, hermano!

FOR. Bueno, yo preferiría nó defender mi propia postura en estos momentos, ya que nos hemos venido ocupando principalmente del intuicionismo y sería fácil que se produjeran confusiones. Pero temo que se equivoque usted en lo que se refiere a la lógica intuicionista: de hecho, se la ha formalizado (campo en el que una veintena de autores han realizado trabajos muy valiosos); lo cual parece demostrar que los intuicionistas estiman la lógica más de lo que cree, aunque sea otra lógica que aquella a la que está usted acostumbrado.

IN. Lamento desengañarle: la lógica no es el cimiento sobre el que me apoyo; ¿cómo podría serlo? : necesitaría a su vez una fundamentación, en la que entrarían principios mucho más intrincados y menos directos que los de las matemáticas mismas; pues las construcciones matemáticas deben ser tan inmediatas para el entendimiento y sus resultados tan claros que no necesiten fundamentación de ningún tipo. Por lo demás, es perfectamente posible saber si un razonamiento es firme o no sin necesidad de lógica alguna: basta una clara consciencia científica. Con todo, es cierto que se ha elaborado una lógica intuicionista; mas para indicar qué importancia tiene, permítame que acuda a un ejemplo. Supongamos que A designe la propiedad (de números enteros) de ser divisible por 8, B la correspondiente en cuanto a 4, y C la misma respecto de 2; podemos escribir $8a$ de la siguiente forma, $4 \times 2a$; mediante esta construcción matemática, P, vemos que la propiedad A entraña la B (o sea, $A \rightarrow B$), y otra análoga, Q, muestra que $B \rightarrow C$; ejecutando ahora primero P y luego Q (yuxtaposición de P y Q) obtenemos $8a = 2 \times (2 \times 2a)$, lo cual hace ver que $A \rightarrow C$. Este proceso sigue siendo válido si sustituimos A, B y C por propiedades arbitrarias: si la construcción P muestra que $A \rightarrow B$ y la Q muestra que $A \rightarrow C$, la yuxtaposición de P y de Q mostrará que $A \rightarrow C$. De esta forma hemos obtenido un teorema lógico; y el proceso por el que se lo deduce hace ver que no difiere esencialmente de los teoremas matemáticos: sólo es más general que ellos, en el sentido, por ej., en que "la adición de enteros es conmutativa" es un enunciado más general que "$2 + 3 = 3 + 2$". Esto es lo que ocurre con todo teorema lógico: no es sino un teorema matemático de generalidad extrema; es decir, la lógica es una parte de las matemáticas, de suerte que en modo alguno puede servir de fundamento suyo. Por lo menos, tal es la concepción de la lógica a la que me siento llevado naturalmente: acaso sea posible y deseable poner a punto otras formas de lógica con vistas a otras finalidades.

Lo que se ha formalizado es la lógica matemática que acabo de caracterizar; y el sistema formal resultante resulta tener unas propie-

dades peculiares, muy interesantes cuando se las compara con las de otros sistemas de lógica formal. Este hecho ha llevado a las investigaciones aludidas por el Sr. For, las cuales, sin embargo, por interesantes que sean, sólo mantienen una vinculación muy laxa con las matemáticas intuicionistas.

LET. En mi opinión, todas esas dificultades son imaginarias o artificiales. Pues la matemática es una cosa muy simple: defino ciertos signos y doy determinadas reglas para combinarlos; y eso es todo.

FOR. Pero necesita ciertos modos de razonar para demostrar la coherencia del sistema formal que haya construido.

LET. ¿Por qué tendría necesidad de demostrarla? No debe usted olvidar que nuestros sistemas formales se construyen con vistas a unas aplicaciones, y que en general resultan ser útiles (hecho que sería difícil de explicar si en ellos fuese deductible toda fórmula); por consiguiente, llegamos a una convicción práctica de coherencia que basta para nuestro trabajo. Lo que yo recuso del intuicionismo es la opinión de que la matemática tenga nada que ver con lo infinito: puedo escribir un signo, α, por ejemplo, y llamarlo el número cardinal de todos los enteros; luego puedo fijar unas reglas para su manipulación de acuerdo con las que el Sr. Clas emplea para este concepto, pero al hacer esto opero enteramente dentro de lo finito. En el momento en que la noción de infinito desempeña un papel, penetran en el razonamiento la oscuridad y la confusión; así, todas las aseveraciones intuicionistas acerca de lo infinito me parecen sumamente ambiguas, e incluso es cuestionable que un signo tal como $10^{10^{10}}$ tenga ningún otro significado que el de una figura trazada sobre papel con la que operamos de acuerdo con ciertas reglas [J. Dieudonné 1949].

IN. Indudablemente, su extremo finitismo proporciona la máxima seguridad frente a toda mala comprensión, pero a nuestros ojos implica una negación de la comprensión que es difícil de admitir: los niños de la escuela primaria comprenden lo que son los números naturales, y admiten el hecho de que sea posible continuar indefinidamente la sucesión de tales números.

LET. Se les hace pensar que comprenden.

IN. Eso no es objeción alguna, porque es posible interpretar toda comunicación por medio del lenguaje como un hacer pensar algo; y también Euclides, cuando en la proposición 20.ª del Libro IX demostró que el conjunto de los números primos es infinito, sabía de qué estaba hablando. Esta noción elemental de los números naturales, conocida por cualquier criatura pensante, es fundamental en las matemáticas intuicionistas: no pretendemos que comporte forma alguna de certidumbre ni de carácter terminante en sentido absoluto, cosas que serían irrealizables, pero sostenemos que es lo suficientemente claro para edificar sobre ella las matemáticas.

LET. La objeción que yo hago no es que suponen ustedes demasiado poco, como piensa el Sr. Clas, sino muy en demasía; pues parten de ciertos principios que sin explicación alguna dan por

intuitivamente claros, y rechazan otros modos de razonar sin presentar ningún fundamento para tal discriminación. Por ejemplo, a la mayoría de la gente el principio del tercio excluso le parece por lo menos tan evidente como el de inducción completa; ¿por qué rechazan ustedes el primero y admiten el segundo? Semejante elección de primeros principios, tan inmotivada, confiere a su sistema un fuerte carácter dogmático.

IN. Es verdad que las aseveraciones intuicionistas tienen que parecer dogmáticas a los que las lean como aserciones acerca de hechos; pero no las entendemos en ese sentido. La matemática intuicionista consiste en construcciones mentales, como ya le he explicado al Sr. Clas; oualquier teorema matemático expresa un hecho puramente empírico, a saber, el haberse logrado realizar cierta construcción; así, es preciso leer "2 + 2 = 3 + 1" como una abreviatura del enunciado "He llevado a cabo las construcciones mentales indicadas por '2+ 2' y por '3 + 1' y he visto que llevan al mismo resultado". Ahora dígame usted dónde puede entrar aquí el elemento dogmático: no en la construcción mental misma, como es evidente por su propia índole de actividad, pero tampoco en los enunciados que se hagan acerca de las construcciones, ya que expresan resultados puramente empíricos.

LET. Sin embargo, usted sostiene que estas construcciones mentales conducen a cierto género de verdad; que no son un juego de los solitarios, sino que en cierto sentido tienen que poseer un valor para la humanidad (si no fuera así sería errado aburrir a los demás con ellas); y en esta pretensión es donde veo el elemento dogmático. La intuición matemática les inspira a ustedes unas verdades objetivas y eternas; en este sentido, su punto de vista no sólo es dogmático, sino incluso teológico [H.B. Curry 1951, p. 6].

IN. En primer lugar, mis pensamientos matemáticos pertenecen a mi vida intelectual individual y se encuentran confinados en mi propio entendimiento, lo mismo que sucede con los demás pensamientos. Solemos estar convencidos de que los demás tienen pensamientos análogos a los nuestros y que pueden entendernos cuando los expresamos con palabras, pero también sabemos que no podemos estar nunca completamente seguros de que se nos entienda con toda exactitud; a este respecto, la matemática no se diferencia esencialmente de los demás objetos de estudio, de modo que si ésta es la razón por la que la considera usted dogmática, debería llamar dogmático a todo razonar humano. La característica del pensamiento matemático es que no nos proporciona verdad alguna acerca del mundo exterior, sino que sólo se ocupa de construcciones mentales; ahora bien, tenemos que distinguir entre la simple práctica de las matemáticas y su evaluación: para construir teorías matemáticas no se necesitan preliminares filosóficos algunos, pero el valor que atribuyamos a esta actividad dependerá de nuestras ideas filosóficas.

SIG. Con esa manera de tratar el lenguaje vuelve usted a tiempos ya pasados: el lenguaje primitivo posee ese carácter flotante y movedizo que describe usted, y el de la vida cotidiana es aún, en su

mayor parte, del mismo género; pero en cuanto comienza el pensamiento científico, entra la formalización del lenguaje. En las últimas décadas, los significistas(2) han estudiado este proceso, que no ha llegado todavía a su fin, ya que se siguen formando lenguajes formalizados cada vez más estrictamente.

IN. Si realmente la formalización del lenguaje es la tendencia de la ciencia, la matemática intuicionista no pertenece a la ciencia en tal sentido de la palabra: se trataría de un fenómeno de la vida, de una actividad natural del hombre, que a su vez podría estudiarse mediante métodos científicos; de hecho, se la ha estudiado valiéndose de tales métodos (a saber, el de formalización del razonar intuicionista y el de la significa), pero es evidente que semejante estudio no pertenece a las matemáticas intuicionistas, como tampoco pertenecen a ella los resultados que con él se obtienen. Claramente se verá que dicho examen científico de estas matemáticas no dará origen nunca a una descripción suya completa y terminante, como tampoco puede llegarse a una teoría completa de otros fenómenos; así pues, por útiles e interesantes que puedan ser tales consideraciones metaintuicionistas, no es posible incluirlas en la propia matemática intuicionista. (Desde luego, estas consideraciones no son aplicables a la formalización en el interior de las matemáticas a que me he referido hace unos momentos.)

PRAG. Permítanme que subraye lo que el Sr. Sig acaba de decir. La ciencia procede mediante la formalización del lenguaje, y emplea este método por ser eficaz; en particular, los modernos lenguajes completamente formalizados han mostrado ser los más útiles de todos. Así pues, el ideal del hombre de ciencia moderno es preparar un arsenal de sistemas formales listos para su empleo entre los que pueda escoger, para una teoría cualquiera, el que represente acertadamente los resultados experimentales; y habría que juzgar tales sistemas por este criterio de utilidad, no mediante una interpretación, vaga y arbitraria, que se prefiera por razones dogmáticas o metafísicas.

IN. Parece completamente razonable juzgar un sistema matemático por la utilidad que tenga; y admito que desde este punto de vista el intuicionismo cuenta todavía con escasas posibilidades de que se lo acepte, ya que sería prematuro destacar las pocas y leves indicaciones existentes de que podría ser de alguna utilidad en la física [J.L. Destouches 1951]; a mi modo de ver, las posibilidades que tiene de ser útil en filosofía, en historia y en las ciencias sociales son mayores (en realidad, desde el punto de vista intuicionista, la matemática es el estudio de ciertas funciones del entendimiento humano, y como tal es muy semejante a tales ciencias). Pero ¿es realmente la utilidad la única medida del valor? No sería difícil mencionar una veintena de actividades valiosas que no proporcionan apoyo alguno a la ciencia, tales como las artes, los deportes y los espectáculos; y el valor que pretendemos debe reconocerse al intuicionismo es de este género: un valor difícil de definir de antemano, pero que se siente claramente cuando entra uno en la

faena. Todos ustedes saben cómo se debaten los filósofos con el problema de definir el concepto de valor en el arte; y sin embargo, cualquier persona instruida lo siente; pues análogamente sucede con el valor de las matemáticas intuicionistas.

FOR. Para la mayoría de los matemáticos tal valor se encuentra fatalmente afectado por el hecho de que ustedes destruyan los resultados matemáticos más preciados; pues un método valioso de fundamentación de las matemáticas debería salvar lo más posible de sus resultados [D. Hilbert 1922]. Esto último podría tal vez lograrse incluso valiéndose de métodos constructivos, ya que son concebibles unas definiciones de la constructividad distintas de la defendida por los intuicionistas; por lo demás, incluso en el reducido número existente de verdaderos intuicionistas no hay completo acuerdo sobre la definición de lo constructivo; el ejemplo más llamativo es el rechazo de Griss del concepto de negación, que otros intuicionistas admiten como perfectamente claro [H. Freudenthal 1936A] [G.F.C. Griss 1946, p. 24; 1946]. Parece probable, por otro lado, que una concepción algo más liberal de lo constructivo pueda permitir que se salven las partes vitales de las matemáticas clásicas.

IN. Como los intuicionistas hablan en un lenguaje no formalizado, son de esperar entre ellos ligeras discrepancias de opinión; pero, aunque han surgido antes y en forma más aguda de lo que podía haberse previsto, en modo alguno son alarmantes, ya que todas ellas se refieren a cuestiones secundarias, sin afectar las ideas fundamentales, a cuyo respecto reina perfecto acuerdo. Así pues, es harto improbable que una concepción más amplia de la constructividad pueda ganarse el apoyo de los intuicionistas. En cuanto a la mutilación de las matemáticas de que me acusa usted, es preciso considerarla como una consecuencia inevitable de nuestro enfoque; también cabe mirarla como una ablación de ciertos adornos perjudiciales, bellos de forma pero horros de sustancia; extirpación que está compensada, siquiera en parte, por el encanto de las sutiles distinciones y los ingeniosos métodos con los que los intuicionistas han enriquecido el pensamiento matemático.

FOR. Nuestro debate ha adoptado la forma de un debate sobre valores. De sus palabras saco la impresión de que está usted dispuesto a reconocer el valor de otras concepciones de la matemática, pero que reclama para la suya un valor propio. ¿Me equivoco?

IN. En realidad, la única tesis positiva de los fundamentos de las matemáticas a que me opongo es la de que la matemática clásica tenga un sentido claro: he de confesar que no entiendo tal cosa. Pero incluso quienes mantienen que lo entienden podrían ser capaces de aprehender nuestro punto de vista y valorar nuestro trabajo.

LET. Las paradojas hacen ver que la matemática clásica no es perfectamente clara.

FOR. Sí, pero la crítica intuicionista va mucho más allá de lo que es necesario hacer para evitarlas; el Sr. In ni siquiera las ha mencionado como argumento en favor de su concepción, aunque no

es dudoso de que a sus ojos la coherencia es un subproducto del intuicionismo al que se acoge de muy buena gana.

SIG. Usted describe su actividad como de construcción mental, Sr. In, pero los procesos mentales sólo son observables a través de los actos a que conduzcan; en su caso, a través de las palabras que pronuncie y las fórmulas que escriba. ¿No quiere esto decir que la única forma de estudiar el intuicionismo es estudiar el sistema formal que construya?

IN. Cuando miro aquel árbol estoy convencido de que veo un árbol, y es precisa una preparación considerable para sustituir tal convicción por el saber de que en realidad llegan hasta mis ojos unas ondas luminosas, haciéndome construir la imagen del árbol. De la misma manera, cuando hablo con ustedes estoy convencido de que les abrumo con mis opiniones, pero ustedes me hacen saber que en realidad produzco vibraciones en el aire, que hacen que ustedes realicen ciertas acciones (por ejemplo, producir otras vibraciones). En ambos casos el primer enfoque es el natural, y el segundo, una construcción teorética; pero se olvida demasiado a menudo que la verdad de tales construcciones depende de la situación actual de la ciencia, y que las palabras "en realidad" deberían traducirse por "de acuerdo con la opinión de los científicos en estos momentos"; por consiguiente, prefiero adherirme a la idea de que, cuando describo la matemática intuicionista, transmito pensamientos a mis oyentes (palabras éstas que no deberían tomarse en el sentido de un sistema filosófico, sino en el de la vida cotidiana).

SIG. Entonces, el intuicionismo, como forma de interacción entre los hombres, sería un fenómeno social, y su estudio pertenecería a la historia de la civilización.

IN. Su estudio, no su práctica; en este punto estoy de acuerdo con el Sr. Prag: *primum vivere, deinde philosophari* (y, si queremos, podemos dejar esto último a los demás). Que los que vienen tras de mí se pregunten en buena hora por qué formo estas construcciones mentales y cómo podría interpretárselas en alguna filosofía; yo me contento con formarles en la convicción de que contribuirán de alguna manera a aclarar el pensamiento humano.

PRAG. Un defecto corriente entre los filósofos es el de hablar de cosas que no conocen sino imperfectamente; y no andamos nosotros muy lejos de caer en semejante trampa. ¿Querría el Sr. In presentarnos algunas muestras del razonar intuicionista, con objeto de que seamos capaces de juzgar con mayor conocimiento de causa la calidad de ese material?

IN. Desde luego; e incluso estoy convencido de que unas pocas lecciones les permitirán penetrar en él mejor que largas discusiones. ¿Puedo pedir a los caballeros a quienes interesen mis explicaciones que me sigan al aula?

II. ARITMETICA

2.1. Los números naturales

IN. Partimos de la noción de los números naturales, 1, 2, 3, etc., pues éstos nos son tan familiares que es difícil reducirla a otras ideas más sencillas; con todo, trataré de caracterizar el sentido que tiene con palabras simples y llanas. En la percepción de los objetos concebimos la noción de entidad mediante un proceso de abstracción de las cualidades particulares del objeto que sea; y también nos damos cuenta de la posibilidad de una repetición indefinida de la concepción de entidades; pues bien, en estas nociones se encuentra el origen del concepto de los números naturales [L.E.J. Brouwer 1907, p. 3; 1948, p. 1237].

CLAS. ¿No son de índole metafísica esas consideraciones?

IN. Se convierten en tales si trata uno de montar sobre ellas una teoría, v.g., responder a la pregunta de si formamos la noción de entidad abstrayendo de percepciones reales de objetos o si, por el contrario, dicha noción ha de estar presente en nuestro entendimiento para que nos sea posible percibir un objeto cualquiera como algo separado del resto del mundo. Pero semejantes preguntas no tienen nada que ver con las matemáticas; nosotros simplemente enunciamos el hecho de que los conceptos de entidad abstracta y de sucesión de tales entidades estén claros para todo ser humano normal, incluyendo los niños pequeños.

CLAS. Admitamos que tiene usted a su disposición los números naturales; ahora necesita algún punto de partida para las deducciones. ¿Admite usted los axiomas de Peano?

IN. Mientras que ustedes piensan a base de axiomas y de deducciones, nosotros lo hacemos a base de evidencia; lo cual cambia todo. Yo no admito ningún axioma que podría rechazar si prefiriese hacerlo; pero la noción de los números naturales no se nos presenta nudamente, sino que desde el principio está envuelta en propiedades que se pueden detectar por simple examen; y las que usted caracteriza mediante los axiomas de Peano se encuentran entre ellas, como voy a mostrarle. Sea "N" una manera abreviada de escribir "número natural"; puede verse inmediatamente que las dos primeras propiedades (1 es un N y si x es un N, el sucesor de x es un N) son verdaderas efectuando la construcción generadora; lo mismo sucede con el tercero y el cuarto axiomas (si x e y son N y sus sucesores son iguales, $x = y$; el sucesor de un N no es igual a 1); en cuanto al llamado axioma de inducción completa, es preciso considerarlo como un teorema general sobre los números naturales —y será conveniente hacer algunas observaciones para prepararnos a demostrarlo.

No cabe duda de que la construcción de un número natural, n, consiste en formar sucesivamente ciertos números naturales, llamados los números de 1 a n (con signos, $1 \to n$); y en cualquier paso de la construcción podremos detenernos a investigar si el número alcanzado en dicho paso posee o no cierta propiedad. Por ejemplo, podemos averiguar si cierto número m distinto de n se encuentra o no en $1 \to n$; en el primer caso diremos que $m < n$, y en el segundo, que $m > n$. Ahora bien, es un teorema que $m \neq n$ y $m > n$ implican $n < m$; pues si m no aparece en $1 \to n$, este hecho demuestra que en el paso mediante el cual llegamos a n no ha terminado la construcción de m; luego n aparece en $1 \to m$.

El teorema de inducción completa admite una demostración del mismo tipo. Supongamos que $E(x)$ es un predicado de números naturales tal que $E(1)$ sea verdadero y que para todo número natural, n, E(n) implique $E(n')$, siendo n' el sucesor de n. Sea p cualquier número natural; recorriendo $1 \to p$ sabemos que la propiedad E, que es verdadera para 1, se conservará en cada uno de los pasos de la construcción de p; luego se cumple $E(p)$.

En lo que se refiere a las definiciones recursivas corrientes de la suma y el producto en el dominio de los números naturales, son aplicables unas observaciones análogas: recorriendo $1 \to p$ vemos que $a + p$ y $p \cdot a$ están definidos para números naturales arbitrarios a y p. Ahora bien, una vez que poseemos los fundamentales métodos de la inducción y la recursión, la aritmética de los números naturales no tropieza con dificultades graves, como tampoco lo hacen la de los enteros ni siquiera la de los racionales; las dificultades surgen solamente cuando interviene de algún modo la totalidad de los enteros, como sucedía en el intento II de definir cierto entero que veíamos en nuestra discusión. Pero tales problemas no pertenecen a la aritmética elemental.

FOR. Ha hablado usted repetidamente de números naturales iguales; pero ¿qué quiere decir eso? ¿No es necesaria una definición de igualdad (que se base, por ejemplo, en una relación biunívoca)?

IN. Indudablemente, se trata de un punto que exige ser aclarado algo; e incluso me obliga a revisar un poco la noción de número natural de que habíamos partido. Si un número natural no fuese otra cosa que el resultado de una construcción mental, no subsistiría tras el acto de su construcción, de modo que sería imposible compararlo con otro número natural, construido en otro instante y en otro lugar; y es patente que no podemos resolver este problema si nos aferramos a la idea de que la matemática es algo puramente mental. En realidad, fijamos el número natural que sea (x, digamos) valiéndonos de una representación material: a cada entidad de la construcción de x le asociamos, por ejemplo, un punto que marquemos sobre un papel; cosa que nos permite comparar mediante una simple inspección números naturales construidos en momentos distintos.

FOR. Eso equivale a aplicar relaciones biunívocas.

IN. Podemos expresarlo así, con tal de que nos demos bien cuenta

de que el proceso de comparación se desenvuelve al nivel prematemático: la matemática empieza después de que se han formado los conceptos de los números naturales y de la igualdad entre ellos. Indudablemente, la dicotomía entre matemáticas y prematemáticas es artificial, exactamente lo mismo que sucede con toda división realizada por el pensamiento humano, pero es una dicotomía que corresponde a una importante diferencia en punto a métodos.

LET. Podría esperarse que las nociones básicas de la matemática fuesen sencillas y claras, pero la que ustedes tienen del número natural resulta ser bastante complicada.

IN. Que yo sepa, la psicología no ha descubierto átomos mentales: es posible analizar cualquier noción, y ninguna es comprensible por sí misma; cuando se la quiere explicar, cada una de ellas depende de sus relaciones con otras. La noción de número natural no constituye excepción alguna a esta regla; y sin embargo, puede valernos como uno de los principales conceptos básicos de las matemáticas, sobre todo por las siguientes tres razones:

1. Cualquier persona mínimamente instruida la comprende fácilmente;
2. Es universalmente aplicable en el proceso de contar, y
3. Subyace a la construcción del análisis.

CLAS. Si dejamos aparte estas cuestiones filosóficas, su interpretación de la aritmética de los racionales es idéntica a la nuestra.

2.2. Los generadores de número real

2.2.1. *Definición; la relación de coincidencia*

IN. Sí, pero en la estación siguiente, la de los números reales, entramos en un paisaje totalmente distinto. Lo mismo que ocurre en la matemática clásica, en el intuicionismo son posibles diversas teorías equivalentes de los números reales [L.E.J. Brouwer 1919A, p. 3; A. Heyting 1935]; voy a exponer brevemente la teoría de Cantor, que presenta ciertas ventajas para nuestros propósitos.

Supongamos que se haya desarrollado la teoría de los racionales, incluida la de sus relaciones de orden. Se llama *sucesión de Cauchy* a una sucesión, $\{a_n\}$, de números racionales en caso de que para todo número natural, k, podamos encontrar un número natural, $n + n(k)$, tal que $| a_{n+p} - a_n | < 1/k$ para todo número natural p; es preciso entender esto de modo que, dado k, seamos capaces de determinar $n(k)$ de una manera efectiva.

Ejemplo. La sucesión de $a \equiv \{2^{-n}\}$ es una sucesión de Cauchy.

Supongamos que la sucesión $b \equiv \{b_n\}$ se defina del siguiente modo: si el n-ésimo dígito después de la coma del desarrollo decimal de π es el 9 de la primera secuencia 0123456789 que aparezca en

este desarrollo, $b_n = 1$; y en todos los demás casos, $b_n = 2^{-n}$. b se diferencia de a, como máximo, en un término, de modo que constituye clásicamente una sucesión de Cauchy; pero mientras no sepamos si en π aparece una secuencia 0123456789 no seremos capaces de encontrar un n tal que $|b_{n+p} - b_n| < 1/2$ para todo p; luego no tenemos derecho a afirmar que b sea una sucesión de Cauchy en nuestro sentido.

Definición 1. Una sucesión de Cauchy de números reacionales es un *generador de número real*; cuando no sea posible la confusión, hablaremos, por brevedad, de generador de número.

Dos generadores de número, $a \equiv \{a_n\}$ y $b \equiv \{b_n\}$, son *idénticos* si $a_n = b_n$ para todo n; y expresaremos esta relación mediante $a \equiv b$. La noción de coincidencia que formulamos a continuación ofrece mayor importancia.

Definición 2. Los generadores de número $a \equiv \{a_n\}$ y $b \equiv \{b_n\}$ *coinciden* si para cada k podemos encontrar un $n = n(k)$ tal que $| a_{n+p} - b_{n+p} | < 1/k$ para todo p. Esta relación se denota mediante $a = b$.

Teorema. La relación de coincidencia entre generadores de número es reflexiva, simétrica y transitiva; la demostración, que es muy fácil, es perfectamente conocida.

Observación. Dado un generador de número cualquiera, $a \equiv \{a_n\}$, puede encontrarse un generador de número, $b \equiv \{b_n\}$ tal que $a = b$ y que la sucesión $\equiv \{b_n\}$ converja tan rápidamente como queramos. Por ejemplo, para que $|b_{n+p} - b_n| < 1/n$ para todos los n y p, basta tomar $b_k = a_{n(k)}$ para todo k.

Siempre que, a partir de ahora, se denote un generador de número por una letra (v, digamos) se sobrentenderá que también puede denotárselo mediante $\{v_n\}$, de suerte que v_n será el n–ésimo componente de la sucesión v.

Como la noción de número real presupone los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos, voy a posponer la definición correspondiente (según la cual todo número real es un conjunto de generadores de número coincidentes) hasta el capítulo III.

2.2.2. *La relación de desigualdad entre generadores de número*

Si $a = b$ es contradictorio (lo cual quiere decir, si la suposición de que sea $a = b$ conduce a una contradicción), escribiremos $a \neq b$.

Teorema 1. Si $a \neq b$ es contradictorio, $a = b$ [L.E.J. Brouwer 1925, p. 254].

Demostración. Determínese n de modo que

$|a_{n+p}-a_n| < 1/4k$ y $|b_{n+p}-b_n| < 1/4k$ para todo p. Supongamos ahora que $|a_n-b_n| \geqslant 1/k$; entonces tendríamos $|a_{n+p}-b_{n+p}| > 1/2k$ para todo p, lo cual entraña $a \neq b$; así pues, $|a_n-b_n| < 1/k$ y $|a_{n+p}-b_{n+p}| < 2/k$ para todo p; y como para todo k podremos encontrar un n tal que esta desigualdad sea válida para todo p, será $a = b$.

CLAS. Tendremos que hacernos al hecho de que semejante teorema necesite una demostración.

IN. No sucede siempre que la demostración de imposibilidad de la imposibilidad de una propiedad sea una demostración de esa propiedad misma; cosa que será instructivo hacer visible con un ejemplo [L.E.J. Brouwer 1925, p. 252]. Voy a escribir el desarrollo decimal de π, y bajo él la fracción decimal $\rho = 0{,}333...$, que interrumpiré en cuanto haya aparecido en π la secuencia de dígitos 0123456789: si el 9 de la primera secuencia 0123456789 de π es el k–ésimo dígito después de la coma, $\rho = \frac{10^k - 1}{3{,}10^k}$. Supongamos ahora que ρ no pueda ser racional; entonces, $\rho = \frac{10^k - 1}{3{,}10^k}$ sería imposible, y en π no podría aparecer ninguna secuencia como la indicada; pero entonces $\rho = 1/3$, cosa que también es imposible. Así pues, el supuesto de que ρ no puede ser racional ha llevado a una contradicción; sin embargo, no tenemos derecho a afirmar que ρ sea racional, ya que esto significaría que podríamos calcular unos enteros ρ y q tales que $\rho = p/q$, lo cual exige, evidentemente, que o bien podamos indicar en π una secuencia 0123456789 o podamos demostrar que no es posible que en él aparezca nunca semejante secuencia.

CLAS. Y usted rechaza mi argumento de que ρ es igual a uno de los números racionales 1/3, 0,3, 0,33, etc., aunque no sepamos a cuál de ellos.

IN. Exactamente; creo que se expresa mejor la situación real en que nos encontramos diciendo que ρ no puede ser distinto de todos y cada uno de esos números.

CLAS. Me parece que la dificultad proviene de su interpretación de la negación, que se separa de la corriente: para usted, "ρ no es racional" significa lo mismo que "la suposición de que ρ sea racional lleva a una contradicción". De ahí que sólo pueda usted hablar de falsedad "de iure", mientras que corrientemente la negación se refiere a la falsedad "de facto"; esto puede dar razón del peculiar comportamiento de la negación que usted emplea.

IN. Puedo adherirme a esa opinión si estamos de acuerdo en que en la matemática intuicionista sólo puede desempeñar un papel la falsedad "de iure"; pues la falsedad "de facto" entraría en conflicto con el principio de la constructividad.

Hablando estrictamente, tendremos que distinguir muy bien el uso de "no" en las matemáticas del que se hace de esta palabra en las explicaciones que no son no matemáticas, sino que se expresan en el lenguaje corriente. Pues en las aserciones matemáticas no puede presentarse ninguna ambigüedad: "no" tiene siempre su sentido

estricto, de suerte que "la proposición p no es verdadera" y "la proposición p es falsa" significan "si suponemos la verdad de p llegamos a una contradicción"; pero si digo que el generador de número que acabo de definir, ρ, no es racional, ello no pretende ser una aserción matemática, sino un enunciado acerca de cuestiones de hecho: quiero decir con ello que no se ha presentado aún ninguna demostración de la racionalidad de ρ. Como no siempre es fácil ver si con una frase lo que se pretende expresar es una aserción matemática o un enunciado acerca del estado actual de nuestros conocimientos, es necesario ser cuidadoso al formularlas: siempre que exista algún peligro de ambigüedad, expresaremos la negación matemática mediante expresiones tales como "es imposible que", "es falso que", "no puede ocurrir que", etc., mientras que la negación de hechos se expresará mediante "no tenemos derecho a aseverar que", "nadie sabe si", etc.

Hay un criterio valiéndonos del cual somos capaces de reconocer las aserciones matemáticas como siendo tales. En efecto, toda aserción matemática puede expresarse de la forma "he realizado mentalmente la construcción A", y es posible expresar la negación matemática de esta aserción diciendo "he efectuado mentalmente una construcción, B, que deduce una contradicción de la suposición de que la construcción A se lleve a cabo", que vuelve a tener la misma forma; por el contrario, la negación fáctica de la primera aserción es "no he efectuado mentalmente la construcción A", enunciado que no posee la forma de una aserción matemática.

PRAG. Parece estar usted muy interesado por ejemplos tales como el del número ρ: los encuentro casi en todos sus trabajos. Para quien lo mira desde fuera, la construcción de semejantes casos patológicos, traídos por los pelos, parece una ocupación algo fútil.

IN. Nos vemos obligados a construir tales ejemplos para convencer a los demás de la necesidad de demostrar ciertas proposiciones: pero sería erróneo considerarlos parte esencial de la matemática intuicionista, exactamente lo mismo que sería un error sostener que la función continua y no diferenciable de Weierstrass constituye una parte esencial del cálculo diferencial clásico.

2.2.3. *La relación de separación entre generadores de número*

Pero hemos insistido demasiado en la negativa noción de desigualdad; pues los conceptos negativos son para nosotros todavía menos importantes que en la matemática clásica; siempre que es posible los remplazamos por conceptos positivos. En el caso de la desigualdad entre generadores de número real ello se logra con la

Definición 1: para los generadores de número real a y b, a *está separado de* b ($a \# b$) significa que pueden encontrarse un n y

un k tales que $|a_{n+p} - b_{n+p}| > 1/k$ para todo p [L.E.J. Brouwer 1919A, p. 3].

$a \# b$ entraña $a \neq b$, pero la aserción conversa es inexacta, cosa que puede hacerse ver mediante un ejemplo todavía más alambicado que el anterior; y como plantea ciertas cuestiones bastante delicadas, lo pospondré a una conferencia ulterior (8.1.1.). Espero que de momento esté suficientemente claro que $a \# b$ es una condición más fuerte que $a \neq b$, ya que la primera exige que se indiquen realmente los números n y k, mientras que la segunda se contenta con una mera demostración de imposibilidad.

Voy a deducir ahora las principales propiedades de la relación #.

Teorema 1. Si $a \# b$, $b \# a$.

Teorema 2. Si $a \# b$ y $a = a'$, $a' \# b$.

Demostración. Podemos encontrar un n y un k tales que

$$|a_{n+p} - b_{n+p}| > 1/k \text{ para todo } p;$$

ahora determinamos m de manera que

$$|a_{m+p} - a'_{m+p}| < 1/2k \text{ para todo } p;$$

luego si h es el mayor de los números m y n,

$$|a'_{h+p} - b_{h+p}| > 1/2k \text{ para todo } p.$$

Teorema 3. Si $a \# b$ es imposible, $a = b$. [L.E.J. Brouwer 1925, p. 254].

La demostración de 2.2.2., Teor. 1, está dispuesta de forma tal que asiente este otro teorema, más fuerte que aquél.

Teorema 4. Si $a \# b$, para todo generador de número real, c, o bien se cumple $a \# c$ o bien $b \# c$.

Demostración. De modo análogo a como hacíamos en la demostración del Teor. 2, encontraremos unos k y h tales que

(I) $|a_{h+p} - b_{h+p}| > 1/k$ para todo p;

(II) $|a_{h+1} - a_{h+p}| < 1/8k$ para todo p;

(III) $|b_{h+1} - b_{h+p}| < 1/8k$ para todo p;

(IV) $|c_{h+1} - c_{h+p}| < 1/8k$ para todo p.

Entonces, en virtud de (I), siendo $p = 1$, o bien

$$|a_{h+1} - c_{h+1}| > 1/2k \text{ o } |b_{h+1} - c_{h+1}| > 1/2k;$$

en el primer caso, de (II) y (IV) deducimos que

$$|a_{k+p} - c_{k+p}| > 1/4k \text{ para todo } p,$$

luego $a \# c$; y en el segundo caso,

$$|b_{k+p} - c_{k+p}| > 1/4k \text{ para todo } p,$$

o sea, $b \# c$.

2.2.4. *Operaciones fundamentales con los generadores de número*

Definición 1. Si a y b son los generadores de número real definidos respectivamente por las sucesiones de números racionales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$

i. $a+b$ es la sucesión $\{a_n+b_n\}$;

ii. ab es la sucesión $\{a_n b_n\}$;

iii. $-a$ es la sucesión $\{-a_n\}$;

iv. si $a \# 0$, a^{-1} es la sucesión $\{c_n\}$, siendo $c_n = a_n^{-1}$ si $a \neq 0$ y $c_n = 0$ si $a_n = 0$.

Teorema 1. $a + b$, ab, $-a$ y a^{-1} son a su vez generadores de número real.

Demostración. Se demuestra fácilmente por métodos conocidos que las respectivas sucesiones definidoras son sucesiones de Cauchy.

Observaciones. (1) Nótese que sólo puede definirse a^{-1} si $a \# 0$; y esta condición es necesaria y suficiente para mostrar que la sucesión definidora de a^{-1} está acotada.

(2) Es posible identificar el número racional r con la sucesión tal que todos y cada uno de sus miembros sean r; y de esta forma el sistema de los generadores de número real se presenta como una ampliación del de los racionales. Esta observación se ha aplicado en la Def. 1, IV.

(3) En el caso de los números racionales no es preciso hacer distinción alguna entre $\neq$ y $\#$, ya que si $a \neq b$, $a - b$ es un número racional que no es 0, y $a - b = p/q > 1/2q$.

Teorema 2. Si $a = a'$ y $b = b'$, se tienen $a + b = a' + b'$ y $ab = a'b'$.
Si $a = a'$, se tiene $-a = -a'$.
Si $a \# 0$ y $a = a'$, se tiene $a^{-1} = (a')^{-1}$.

Demostración. Basta demostrar la última aserción. Como $a \# 0$, podremos encontrar un n y un j tales que $|a_{n+p}| > 1/j$ para todo p; y análogamente, encontraremos un n' y un j' tales que $|a'_{n'+p}| > 1/j'$ para todo p.

Dado un número natural cualquiera, k, podemos determinar l de suerte que

$$|a_{l+p} - a'_{l+p}| < \frac{1}{jj'k} \text{ para todo } p;$$

hagamos ahora $a^{-1} = c$ y $(a')^{-1} = c'$; entonces, si m es el mayor de los números n, n' y l.

$$|c_{m+p} - c'_{m+p}| = \frac{|a_{m+p} - a'_{m+p}|}{|a_{m+p} a'_{m+p}|} < 1/k \text{ para todo } p;$$

y de aquí $c = c'$.

2.2.5. *Identidades fundamentadas*

Para poder formular concisamente las identidades fundamentales voy a introducir el concepto de función racional.

Definición 1. Toda *función racional*, $f(a, b, c, \ldots)$ queda definida por un número finito de aplicaciones de las cuatro operaciones fundamentales; y está definida para los generadores de número real, a, b, c,..., tales que, siempre que en el cálculo de f deba tomarse la inversa de un generador de número, éste $\# 0$. Por ejemplo,

$$f(a, b) = a^{-1} \ (a + b^{-1})^{-1}$$

está definida para los generadores de número real a y b tales que tanto a como b y $a + b^{-1}$ sean $\# 0$.

Lema. Si $f(a, b, c, \ldots)$ es una función racional cualquiera, a, b y c son generadores de número real dados para los que f esté definida y

$$f(a, b, c, \ldots) \equiv x,$$

podemos encontrar un número natural, n, tal que sea

$$x_{n+p} = f(a_{n+p}, b_{n+p}, c_{n+p}, \ldots),$$

para todo p.

Demostración. Sean $\varphi_1 \ (a, b, c, \ldots)$, $\varphi_2 \ (a, b, c, \ldots)$, ... las funciones cuyas inversas hayan de tomarse sucesivamente en el cálculo

de f; entonces, $\varphi_1(a, b, c, \ldots) \# 0$, y podremos encontrar un índice, k_1, tal que $\varphi_1(a_n, b_n, c_n, \ldots) \neq 0$ para $n > k_1$; a continuación encontramos un $k_2 > k_1$ tal que $\varphi_2(a_n, b_n, c_n, \ldots) \neq 0$ para $n > k_2$; etc. Si k_r es el último índice que se encuentre de este modo, se sigue de 2.2.4, Def. 1, que $x_n = f(a_n, b_n, c_n, \ldots)$ para $n > k_r$.

Teorema 1. Toda identidad racional que sea válida para los números racionales se cumplirá por generadores de número real, en el sentido siguiente:

sean $f(p, q, r, \ldots, x, y, z, \ldots)$ y $g(p, q, r, \ldots, x, y, z, \ldots)$ funciones racionales tales que $f = g$ en caso de que $p, q, r, \ldots$ se sustituyan por unos números racionales dados, $p_0, p_0, r_0, \ldots$ y $x, y, z, \ldots$ se sustituyan por números racionales arbitrarios para los cuales f y g estén definidas; entonces,

$$f(p_0, q_0, r_0, \ldots, a, b, c, \ldots) = g(p_0, q_0, r_0, \ldots, a, b, c, \ldots)$$

para cualesquiera generadores de número real $a, b, c, \ldots$, para los que f y g estén definidas.

Demostración. Hagamos

$$f(p_0, q_0, r_0, \ldots, a, b, c, \ldots) \equiv v$$

y

$$g(p_0, q_0, r_0, \ldots, a, b, c, \ldots) \equiv w.$$

como hemos visto en el lema, podemos encontrar un índice, k, tal que

$$f(p_0, q_0, r_0, \ldots, a_n, b_n, c_n, \ldots) = v_n$$

y

$$g(p_0, q_0, r_0, \ldots, a_n, b_n, c_n, \ldots) = w_n$$

para $n > k$; pero por la hipótesis, $v_n = w_n$; de ahí que sea $v = w$.

Esto demuestra de un golpe todas las identidades fundamentales de la aritmética: y vamos a completarlo con las leyes que siguen, que ofrecen una importancia especial en el análisis.

Teorema 2. $a \# b$ implica $a + c \# b + c$.

Demostración. Si $|a_{n+p} - b_{n+p}| > 1/k$, tendremos

$$|(a_{n+p} + c_{n+p}) - (b_{n+p} + c_{n+p})| > 1/k \text{ para todo } p.$$

Teorema 3. $a \# 0$ y $b \# 0$ implica $ab \# 0$.

Demostración. Si $|a_{n+p}| > 1/k$ y $|b_{n+p}| > 1/k$ para todo p, tendremos $|a_{n+p}b_{n+p}| > 1/k^2$ para todo p.

Teorema 4. $ab \# 0$ implica $a \# 0$ y $b \# 0$.

Demostración. Podemos encontrar un k y un n tales que

$$|a_{n+p}b_{n+p}| \geq 1/k,\ |a_{n+p} - a_n| < 1, \text{ y } |b_{n+p} - b_n| < 1$$

para todo p; luego

$$|a_{n+p}| > \frac{1}{k(|b_n|+1)} \quad \text{y} \quad |b_{n+p}| > \frac{1}{k(|a_n|+1)}$$

para todo p.

Teorema 5. $a + b \# 0$ implica que o bien $a \# 0$ o $b \# 0$.

Demostración. Supongamos que $a + b \# 0$; por el Teor. 2, $-a + a + b \# -a$, y $b \# -a$; por 2.2.3, Teor. 4, o bien $b \# 0$ o $-a \# 0$; en este último caso, añádase a a ambos miembros y aplíquese el Teor. 2.

CLAS. Clásicamente, estos teoremas nos presentan propiedades negativas, y damos demostraciones indirectas de ellos. Por ejemplo: si $a + c = b + c$, se tiene $a = b$; luego si $a \neq b$, se tiene $a + c \neq b + c$ Pero advierto que ustedes necesitan demostraciones directas porque se ocupan de la relación positiva #, en lugar de hacerlo de la relación negativa $\neq$.

IN. Tanto los teoremas acerca de # como sus demostraciones son más sencillos que los relativos a $\neq$ y a =; pues, cómo voy a hacer patente en el ejemplo que sigue, es preciso manejar estos últimos con gran precaución.

Voy a definir dos generadores de número real, a y b, valiéndome de las siguientes leyes: si en los primeros n decimales de π no aparece ninguna secuencia 0123456789, $a_n = b_n = 2^{-n}$; y si semejante secuencia aparece en los primeros n decimales considerados, supongamos que el 9 de la primera vez que aparezca es el k—ésimo dígito; entonces, si k es impar, $a_n = 2^{-k}$ y $b_n = 2^{-n}$, pero si k es par, $a = 2^{-n}$ y $b_n = 2^{-k}$. Ahora, ni en lo que se refiere a a ni en cuanto a b estamos en situación de solventar si es 0 o no; sin embargo, $ab = 0$: en el primer caso, $a_n b_n = 2^{-2n}$, y en el segundo, $a_n b_n = 2^{-k-n}$, de modo que, en cualquiera de ellos, $a_n b_n < 1/m$ para $n > m$. En consecuencia, no será posible demostrar la proposición "si ab = 0, o $a = 0$ o $b = 0$" mientras existan problemas matemáticos no resueltos del género que hemos empleado en este ejemplo.

CLAS. Con todo si $ab = 0$, tiene que ser imposible que ni a ni b sean 0.

IN. Cierto, pues, $a \neq 0$ y $b \neq 0$ implica $ab \neq 0$, como contrapartida negativa del Teor. 3. Voy a demostrarlo en varios pasos.

(I) Si $ab = 0$ y $a \# 0$, tendremos $b = 0$, pues $b \# 0$ daría $ab \# 0$ (Teor. 3), y si $b \# 0$ es imposible, ha de ser $b = 0$ (2.2.3, Teor. 3).

(II) Si $ab = 0$ y $b \neq 0$, tendremos $a = 0$, ya que, por (I), $a \# 0$ nos daría $b = 0$.

(III) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, tendremos $ab \neq 0$, ya que, por (II), $ab = 0$ unido a $b \neq 0$ nos daría $a = 0$.

FOR. ¿No podríamos decir que si $ab = 0$, o $a = 0$ o $b = 0$, pero que no necesitamos saber cuál de estas relaciones es verdadera?
IN. Sería peligroso adoptar tan descuidada manera de expresarse en esta sutil cuestión: sólo aseveramos una proposición si podemos demostrarla, de modo que sólo aseveraremos que o $a = 0$ o $b = 0$ en caso de que podamos demostrar una de estas proposiciones. Así pues, al aseverar que es imposible que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, indicamos exactamente lo que hemos demostrado, y esta expresión apenas es más complicada que la que usted propone; pero si empleásemos esta última, tendríamos que recordar siempre que tiene un sentido distinto que aquel en que hacen pensar las palabras.

2.2.6. *Las relaciones de orden entre generadores de número*

Voy a ser breve al ocuparme de estas relaciones.

Definición 1. $a < b$ si pueden encontrarse un n y un k tales que $b_{n+p} - a_{n+p} > 1/k$ para todo p; $a > b$ significa lo mismo que $b < a$.

Teorema 1. Si $a \# b$, o bien $a < b$ o bien $b < a$.

Demostración. Encuéntrense un n y un k tales que $|a_{n+p} - b_{n+p}| > 1\ k$ para todo p; determinemos ahora $m > n$ de manera que $|a_m - a_{m+p}| < 1/4k$ y que $|b_m - b_{m+p}| < 1/4k$ para todo p; entonces, o bien $a_m - b_m > 1/k$ o bien $b_m - a_m > 1/k$. En el primer caso, $a_{m+p} - b_{m+p} > 1/2k$ para todo p, con lo cual $b < a$; y en el segundo caso obtenemos $a < b$.

Teorema 2. Si $a < b$, se tiene $a \# b$.
Esto se sigue inmediatamente de las definiciones.
Los teoremas 1 y 2 hacen ver que $a \# b$ es equivalente a $(a < b$ o $a > b)$.

Teorema 3. Si tanto $a < b$ como $b < a$ son contradictorios, se tiene $a = b$.

Demostración. Mediante el Teor. 1, deducimos una contradicción de la suposición de que $a \# b$, luego, 2.2.3, Teor. 3, nos da $a = b$.

Teorema 4. Si $a < b$, para todo número real, c, se cumplen o $a < c$ o $c < b$.

Demostración. Análoga a la de 2.2.3, Teor. 4.

Teorema 5. Si $a < b$ y $b = c$, se tiene $a < c$.

Demostración. Como la de 2.2.3, Teor. 2.

Teorema 6. Si $a < b$ y $b < c$, se tiene $a < c$.

La *demostración* es fácil a partir de la definición.

Teorema 7. $a < b$ implica $a + c < b + c$.

Demostración. Como la de 2.2.5, Teor. 2.

Teorema 8. Si $a > 0$ y $b > 0$, se tiene $ab > 0$.

Demostración. Como para 2.2.5, Teor. 3.

Definición 2. Escribimos $a \not> b$ si $a > b$ es imposible, y $a \not< b$ si $a < b$ es imposible.

Nótese que $a \not> b$ no es lo mismo que ($a < b$ o $a = b$). Por ejemplo, en el ejemplo de 2.2.2, $\rho \not> 1/3$, pero no sabemos si $\rho < 1/3$ o $\rho = 1/3$.

Teorema 9. Si $a \not< b$ y $b > c$ se tiene $a > c$.

Demostración. De $b > c$ se sigue que $b > a$ o $a > c$; como lo primero es imposible, tenemos $a > c$.

Teorema 10. Si $a > b$ y $b \not< c$, se tiene $a > c$.

La *demostración* es análoga a la anterior.

Teorema 11. Si $a \not> b$ y $b \not> c$, se tiene $a \not> c$.

Demostración. Supongamos que $a > c$; entonces, $a > b$ o $b > c$, en virtud del Teor. 4.

2.2.7. *Máximo y mínimo de dos generadores de número.*

Definición 1. Si $a \equiv \{a_n\}$, y $b \equiv \{b_n\}$, $\max(a,b) \equiv \{\max(a_n, b_n)\}$ y $\min(a, b) \equiv \{\min(a_n, b_n)\}$.

Teorema 1. Si a y b son generadores de número real, $c \equiv \max(a, b)$ y $d \equiv \min(a, b)$ son también generadores de número real.

Demostración. Hállese un n tal que para todo p tengamos

$$|a_{n+p} - a_n| < 1/k, \quad |b_{n+p} - b_n| < 1/k.$$

Supongamos ahora que $a_n \geq b_n$, con lo cual $c_n = a_n$; entonces, se tendrá $c_{n+p} \geqq a_{n+p} > a_n - 1/k = c_n - 1/k$, y además $a_{n+p} < a_n + 1/k$ y $b_{n+p} \leqslant b_n + 1/k \leqq a_n + 1/k$, de modo que $c_{n+p} < c_n + 1/k$. De ello se sigue que la sucesión $\{c_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Teorema 2. máx$(a, b) \lessdot a$; máx$(a, b) \lessdot b$; máx(a, b) = máx(b, a); mín (a, b) tiene propiedades análogas; máx$(a, b) \lessdot$ mín(a, b).

Teorema 3. Si $x >$ máx(a, b), se tiene $x > a$ y $x > b$. Conversamente, si $x > a$ y $x > b$, se tiene $x >$ máx(a, b).

Demostración. La primera parte del teorema se sigue inmediatamente de máx$(a, b) \lessdot a$ y 2.2.6, Teor. 10. Para demostrar la segunda parte basta observar que a partir de

$$x_{n+p} - a_{n+p} > 1/k \quad \text{y} \quad x_{n+p} - b_{n+p} > 1/k$$

se sigue que

$$x_{n+p} - \text{máx}\ (a_{n+p}, b_{n+p}) > 1/k.$$

Teorema 4. máx $(ab, 0) =$ máx $(a, 0)$ máx $(b, 0) +$
$+$ mín $(a, 0)$ mín $(b, 0)$.

Demostración. Esta ecuación se comprueba fácilmente cuando a y b son números racionales sin más que examinar los distintos casos en cuanto a los signos de a y b; y su validez para los generadores de número real se sigue de las definificiones de ab y de máx(a, b) y mín(a, b).

Teorema 5. máx(a, b) + mín $(a, b) = a+b$.

2.2.8. *Valor absoluto de un generador de número*

Definición. Si a es un generador de número real, su *valor absoluto* es $|a|$ = máx$(a, -a)$; o, cosa que equivale a lo mismo, si $a \equiv \{a_n\}$, $|a| \equiv \{|a_n|\}$.

Observación. La gráfica de la función $y = |x|$ no es la unión de dos semirrectas: hay que complementarla mediante los puntos para los cuales se desconozca si corresponden a un valor de x que sea >0, <0 ó $= 0$; cosa que se consigue con la definición que hemos dado, que define x para todo generador de número real, x.

En general, si queremos considerar una línea poligonal como curva continua, tenemos que complementarla en cada ángulo de manera análoga.

Teorema 1. Si a y b son generadores de número real,

$$|a| + |b| \lessdot |a| + |b|.$$

Demostración. Supongamos que $|a| + |b| < |a| + |b|$; entonces podríamos encontrar un n y un k tales que

$$|a_{n+p} + b_{n+p}| - (|a_{n+p}| + |b_{n+p}|) > 1/k \text{ para todo } p;$$

pero esto no puede ser verdad para ningún valor de p.

Teorema 2. $|a|\,|b| = |ab|$.

Teorema 3. $|-a| = |a|$; si $a \neq 0$, $|a^{-1}| = |a|^{-1}$.

2.3. Los números reales respetables

FOR. Permítame volver a su ejemplo de dos números cuyo producto era cero sin que ninguno de los dos lo fuese. En éste y otros ejemplos semejantes emplea usted números reales cuyas relaciones de orden con respecto a los racionales no se conocen totalmente; ¿no podríamos sortear tales complicaciones restringiendo la aritmética a los números reales que yo me atrevería a llamar *respetables,* o sea, a aquellos que están perfectamente ubicados con respecto a los racionales?

IN. Esa parece una prudente propuesta, ya que la mayoría de los números reales que se presentan en el análisis son respetables en ese sentido; sin embargo, no creo que sea realmente posible resolver de esa forma las dificultades a que usted alude. Pero no voy a entrar en esta cuestión, ya que hay objeciones todavía más graves; antes de ocuparme de ellas, con todo, considero conveniente demostrar que algunos de los números reales más importantes son respetables.

La demostración es muy sencilla por lo que se refiere a e.

$e = \sum_0^\infty \frac{1}{k!}$ (las sumas parciales de la serie forman un generador de número); supongamos ahora $e = m/n$; haciendo

$$s_n = \sum_0^n \frac{1}{k!} \quad \text{y} \quad r_n = \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{k!},$$

tendríamos sucesivamente:

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_1^\infty \frac{(n+1)!}{(n+k)!} < \frac{1}{(n+1)!} \sum_1^\infty \frac{1}{(n+2)^{k-1}} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!\,n};$$

$$\frac{m}{n} = s_n + r_n\,; \qquad m(n-1)! = n!\,s_n + n!\,r_n\,;$$

pero esto último es imposible, ya que $n!\,r_n < 1/n$ no es un entero.

CLAS. Esa es una demostración perfectamente conocida de la irracionalidad de e; pero ¿dirime la cuestión de las relaciones de orden entre e y m/n?

IN. Para hacerlo, tenemos que convertir la última parte en un razonamiento positivo. Advertimos, ante todo, que

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - s_n < \frac{1}{n!\,n}$$

$$\frac{1}{n+1} < n!\,(e - s_n) < \frac{1}{n}\,;$$

como $n!\left(\frac{m}{n} - s_n\right)$ es un entero, $\left|n!\left(e - \frac{m}{n}\right)\right| > \frac{1}{n+1}$; esto nos proporciona

$\left|e - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{(n+1)!}$; y en consecuencia, basta calcular e con un grado de aproximación suficiente para solventar la cuestión de sus relaciones de orden con respecto a m/n.

Como ve usted, con objeto de demostrar que un número real dado, a, es respetable, basta dar una demostración de la irracionalidad de a, ya que con ella se establece a la vez una medida del grado de esa irracionalidad, o sea, una función aritmética, $\varphi(n)$, tal que $a - \frac{m}{n} > \frac{1}{\varphi(n)}$ para todos los valores de m y de n.

Para encontrar una medida de la irracionalidad de los números algebraicos [L.E.J. Brouwer 1920, p. 960], fijémonos en dos números algebraicos, a y b; valiéndonos de un cálculo en el que sólo entren operaciones con números racionales encontraremos una ecuación algebraica,

$$f(x) \equiv c_0 x^n + \ldots + c_n = 0 \text{ (siendo } c_0 > 0),$$

con coeficientes enteros, entre cuyas raíces se encuentren a y b y cuyo discriminante sea d, $\neq 0$ (siendo d un entero). Ahora bien,

$$d = c_0^{2n-2} \prod_{i<k} (w_i - w_k)^2,$$

siendo $w_1 = a, w_2 = b, w_3, \ldots w_n$ las raíces de $f(x) = 0$; determinemos el entero, h, tal que

$$|w_i - w_k| < h \quad (i, k = 1, \ldots, n);$$

entonces, $|a-b|^2 > \frac{|d|}{c_0^{2n-2} h^{n^2-n-2}}$.

Y si tomamos para b un número racional, hemos hallado así una medida de la irracionalidad de a.

Todo esto es bastante satisfactorio; pero por otra parte no sabemos si la constante de Euler, C, es racional, de modo que ésta, en el estado actual de nuestros conocimientos, no satisface la condición que había impuesto usted. Todavía más grave es el hecho de que la suma de dos números respetables no necesite ser también respetable. Por poner un ejemplo, voy a definir un generador de número real, c, escribiendo el desarrollo decimal de π y deteniéndome tras la primera secuencia que exista de una de las formas 0123456789 o 9876543210; pero si esta última aparece primero, cambiaré en 1 el 0 final. Tanto π como c son números respetables, lo cual se ha demostrado en el caso de π por Brouwer [L.E.J. Brouwer 1920, p. 961]: la demostración que da este matemático hace ver que para todo número racional, r, podemos encontrar un número natural, n, tal que $|\pi - r| > 10^{-n}$; y calculando π con n dígitos después de la coma averiguamos la relación de orden existente entre c y π. Pero $c - \pi$ no es respetable (o, al menos, no sabemos que lo sea), ya que actualmente nadie es capaz de solventar la cuestión de si $c - \pi$ es igual, mayor o menor que 0.

Por estas razones parece impráctico restringir la aritmética a los números respetables. Y, en consecuencia, dejaré de lado esta noción y seguiré adhiriéndome a la definición presentada en 2.2.1, Def. 1.

2.4. Los límites de las sucesiones de generadores de número real

Por mor de la completitud, voy a formular la definición de convergencia positiva.

Definición 1. La sucesión de generadores de número real $\{a_n\}$ es *(positivamente) convergente* hacia el *límite* a si, dado un número natural cualquiera, k, puede encontrarse un número natural, n, tal que, para todo número natural p,

$$|a - a_{n+p}| < 2^{-k}. \tag{1}$$

CLAS. En las definiciones de este género, lo importante no son las palabras, sino la manera en que se las entienda; y usted lo recalca empleando las palabras "puede encontrarse", que expresan que el número n no solamente ha de existir, sino que ha de conocérselo efectivamente. Pero tengo todavía una pregunta que hacerle: ¿por qué usa la expresión "positivamente convergente": existe alguna noción de convergencia negativa?

IN. En realidad, y como sucede con muchos otros conceptos, además de la noción positiva de convergencia, que se obtiene de una forma natural si tomamos la definición habitual en sentido constructivo, es posible definir una noción negativa, más débil, que clásica-

mente es equivalente a la positiva. Sin embargo, como al utilizar estas nociones negativas se presentan dificultades vinculadas a las propiedades de la negación intuicionista, me parece mejor tratarlas en un capítulo sobre la lógica (7.3.2).

El principio general de convergencia de Cauchy es válido; y les dejo a ustedes la tarea de formularlo positivamente y de demostrar que proporciona una condición necesaria y suficiente de convergencia. También subsisten intuicionísticamente los teoremas acerca de la convergencia de una subsucesión, los relativos al límite de la sucesión suma y el de la sucesión producto de dos sucesiones, así como otros teoremas semejantes; sin embargo, otros muchos teoremas clásicos ya no son válidos. Como ejemplo, puede afirmarse que una sucesión monótona acotada no necesita ser convergente; tenemos un contraejemplo sencillo en la sucesión $\{a_n\}$definida del modo siguiente: $a_n = 1 - 2^n$ si entre los primeros n dígitos del desarrollo decimal de π no se encuentra ninguna secuencia 0123456789, y $a_n = 2 - 2^{-n}$ si entre esos n dígitos aparece dicha secuencia; pues nadie sabe si el límite de esta sucesión, en caso de existir, será 1 ó 2; por consiguiente, no nos está permitido decir que exista tal límite formando un generador de número real bien definido.

No voy a detenerme ahora a dar definiciones de conceptos tales como los de límite superior de una sucesión o de mínima cota superior de una sucesión, ya que se obtienen a partir de las definiciones usuales expresándolas positivamente y tomando en sentido positivo toda aserción existencial que en ellas aparezca.

Obsérvese que $a \equiv \{a_n\}$, siendo racionales los a_n, implica $\lim a_n = a$.

III. LOS DESPLIEGUES Y LAS ESPECIES

3.1. Los despliegues

3.1.1. *Las sucesiones que se prolongan infinitamente*

Hasta ahora hemos supuesto que todo generador de número real está determinado por una ley que, siendo n cualquier número natural, proporciona unas prescripciones completas para calcular el n-ésimo miembro de la sucesión. Ahora bien, este punto de vista basta mientras sólo nos fijemos en generadores de número real aislados, pero se convierte en insatisfactorio en la teoría del continuo (considerado como el conjunto de todos los generadores de número real): la noción de ley arbitraria es innatural e inmanejable; puede ser útil cuando se base uno en un sistema formal, pero entonces no lleva a una teoría que se corresponda suficientemente con la idea intuitiva que tenemos del continuo. Brouwer ha sido el primero en mostrar cómo puede obtenerse una teoría satisfactoria de éste sin valerse de la idea de ley arbitraria.

Nunca tenemos enteramente al alcance de la mano un generador de número real: nunca poseemos otra cosa que una parte finita de la sucesión que lo defina; lo cual nos lleva a pensar que todo generador de número real se encuentra en constante estado de crecimiento. Ahora bien, la noción de la ley de progresión sólo es esencial aquí en la medida en que garantiza la posibilidad de continuar ilimitadamente la sucesión, luego podemos eliminarla postulando directamente tal posibilidad [L.E.J. Brouwer 1919A, p. 3; 1920, p. 956; 1924, p. 245]; así pues, con *sucesión que se prolonga infinitamente* (abreviadamente, spi) queremos decir exactamente lo que expresan estas palabras, o sea, sucesión que puede continuarse *ad infinitum;* y la cuestión de cómo se determinen sucesivamente los componentes de la sucesión, ya sea mediante una ley, por libre elección, lanzando un dado o por cualquier otro medio, carece enteramente de importancia. Desde luego, surgen ahora dos preguntas: ¿es legítima la introducción del concepto de spi? ; ¿es oportuna? Puede contestarse afirmativamente a la primera si dicho concepto es lo suficientemente claro para que se lo pueda admitir como un concepto fundamental de la matemática. Pero sospecho que ustedes albergan dudas sobre la claridad.

FOR. Desde luego, yo las tengo; pues al incluir tal concepto introduce usted en las matemáticas la noción de tiempo y un elemento subjetivo que no tienen un puesto en ellas: toda sucesión que se prolonga infinitamente se prolonga en el tiempo, y la manera de prolongarse puede depender de las elecciones que se hagan, o sea, de unos actos voluntarios del sujeto que elija.

IN. En eso, de acuerdo; con todo, si examinamos los teoremas sobre la aritmética de los números reales de los apartados 2.2.4 y 2.2.5 veremos que sólo dependen de la posibilidad de continuar indefinidamente las sucesiones: nunca nos hemos valido del hecho de que su continuación estuviera gobernada por una ley; luego tiene que ser posible atender a tal continuación sin preguntar cuál será la ley que la gobierne. Por ejemplo, en la definición de la suma de dos generadores de número real (2.2.4), se sabe cuál es la n-ésima aproximación de $a + b$ en cuanto estén dadas las n-ésimas aproximaciones de a y de b; de ahí que, si a y b son sucesiones que se prolongan infinitamente, $a + b$ sea también una sucesión de este género. Así pues, para llegar al concepto de spi no necesitamos introducir ideas nuevas; en particular, no es preciso introducir la noción de elección: aquí usamos la palabra "elección" como expresión breve referente a la generación de un componente de la sucesión; por lo tanto, la idea de una ley que gobierne la producción de ésta no nos es necesaria, y puede eliminársela por un proceso de abstracción. Dadas estas razones, le ruego que admita que la noción de spi es suficientemente clara.

En lo que se refiere a la dependencia de toda spi del concepto de tiempo y su subjetividad, es necesario tratar la cuestión con mayor extensión. Ampliando 2.2.1, Def. 1, definamos generador de número real como una spi que sea una sucesión de Cauchy de números racionales. Ahora merece atención especial la condición de ser una sucesión de Cauchy, pues si se eligen libremente los números que formen tal sucesión, ¿cómo sabremos de antemano que ésta lo será de Cauchy? Evidentemente, la única manera de hacerlo es restringir la libertad de elección mediante unas reglas que garanticen la propiedad de Cauchy *antes de efectuar elección alguna,* esto es, mediante la condición de que $|a_n - a_{n+p}| < 1/n$ para todo n y todo p: una spi a la que sólo hayamos sometido a esta condición será, ciertamente, una sucesión de Cauchy.

De la misma manera, es posible ampliar toda la teoría de los generadores de número real que hemos explicado en los apartados 2.2 y 2.4 de suerte que abarquen los generadores de número real en el sentido ampliado que ahora hemos definido; y, de acuerdo con ello, a partir de este momento voy a adoptar esta última definición.

Hablando en general, eliminamos los aspectos subjetivos y temporales de la noción de spi al admitir únicamente aquellos razonamientos que se apliquen a las sucesiones con independencia de las elecciones que estén todavía por hacer.

Las elecciones mediante las cuales se genera una spi no tienen por qué ser completamente libres: es posible restringir tal libertad de varias maneras, con tal de que en cada estadio seamos capaces de solventar la cuestión de qué componentes pueden tomarse en la próxima elección y cuáles no. Por ejemplo, la condición de que sea $|a_n - a_{n+p}| < 1/n$ para todo n y todo p satisface este requisito, ya que tras haber efectuado las elecciones correspondientes a $a_1, \ldots, a_n$

sabemos qué números racionales pueden elegirse como $a_n + 1$ y cuáles no. Brouwer permite que, tras haber efectuado cierto número de elecciones, se añadan por una decisión libre nuevas restricciones a las elecciones subsiguientes [L.E.J. Brouwer 1924, p. 245].

3.1.2. *Definición de despliegue*

El mayor interés que ofrece el concepto de spi reside en el modo de generalidad que conlleva: toda sucesión de Cauchy de números racionales libre representa el continuo de los generadores de número real mucho mejor que una sucesión determinada por una ley no especificada, ya que corresponde al concepto intuitivo del continuo como una posibilidad de determinación gradual de puntos. La generalización de esta idea lleva a la definición brouweriana de despliegue (*spread*) [L.E.J. Brouwer 1918, p. 3; 1924, p. 244; 1954, p. 8].

Todo despliegue, M, está definido por dos leyes: la primera, a la que voy a llamar *ley de despliegue*, Λ_M, regula las elecciones a hacer de números naturales, mientras que el efecto debido a la segunda, o *ley complementaria*, Γ_M, consiste en asignar una sucesión de entidades matemáticas a toda spi de números naturales que se genere de acuerdo con la primera ley.

Es conveniente introducir las expresiones que siguen relativas a sucesiones finitas: $a_1, \ldots, a_n, a_n + 1$ será un *descendiente inmediato* de $a_1, \ldots, a_n$; y, conversamente, $a_1, \ldots, a_n$ será el *antecesor inmediato* de $a_1, \ldots, a_n, a_n + 1$.

Definición 1. Una ley de despliegue es una regla, Λ, que divide las sucesiones finitas de números naturales en sucesiones admisibles e inadmisibles, de acuerdo con las prescripciones siguientes:

(1) mediante Λ, es posible solventar, para todo número natural k, si es una sucesión admisible de un solo miembro o no;

(2) toda sucesión admisible, $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_n + 1$, es un descendiente inmediato de una sucesión admisible $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

(3) dada una sucesión admisible, $a_1, \ldots, a_n$, Λ nos permite solventar, para todo número natural, k, si $a_1, \ldots a_n, k$, es una sucesión admisible o no;

(4) para toda sucesión, admisible, $a_1, \ldots, a_n$, puede encontrarse al menos un número natural, k, tal que $a_1, \ldots, a_n, k$ sea una sucesión admisible.

Así pues, es posible representar las sucesiones admisibles como algo que se despliega a modo de un abanico, según vemos en la Fig.

1; pero es preciso recordar que de todo vértice del diagrama puede partir un número infinito de ramas.

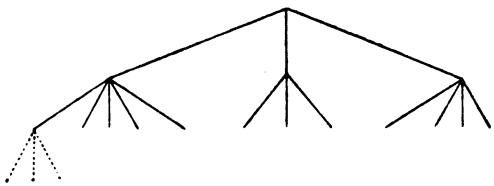


Fig. 1

Definición 2. La *ley complementaria*, Γ_M, de un despliegue, M, asigna una entidad matemática definida a toda sucesión finita que sea admisible de acuerdo con la ley de despliegue de M.

FOR. ¿Qué tipo de entidades asigna Γ_M a las sucesiones admisibles?

IN. En la teoría de los generadores de número real, números racionales; y en general pueden ser cualesquiera entidades matemáticas previamente introducidas.

Definición 3. Se llama spi *admisible* a toda spi, $\{a_n\}$, que se someta a la condición de que, para todo n, $a_1, \ldots, a_n$ tiene que ser una sucesión admisible de acuerdo con la ley de despliegue Λ_M. Y la spi de las entidades que la ley complementaria asigne a las sucesiones $a_1; a_1, a_2; \ldots; a_1, \ldots, a_n; \ldots$ es un *elemento* del despliegue M.

Así pues, todo elemento, b, de un despliegue es una spi, $\{b_n\}$; nos referiremos a b_n llamándolo n-ésimo *componente* de b.

Definición 4. Dos elementos de despliegues son iguales si sus n-ésimos componentes son iguales para todo n.

Definición 5. Dos despliegues son *iguales* si para todo elemento de uno cualquiera de ellos puede encontrarse un elemento igual en el otro.

Se ve fácilmente que las relaciones de igualdad entre elementos de despliegues y entre despliegues satisfacen las condiciones usuales de reflexividad, simetría y transitividad.

3.1.3. *Ejemplos de despliegues*

(I) Supongamos que $r_1, r_2, \ldots$ designe una enumeración de números racionales. Λ_M: todo número natural forma una sucesión admisible de un miembro; si $a_1, \ldots, a_n$ es una sucesión admisible, $a_1, \ldots, a_n, a_n + 1$ es una sucesión admisible si y sólo si $|r_{a_n} - r_{a_{n+1}}| < 2^{-n}$.

Γ_M: a la sucesión $a_1, \ldots, a_n$ (si es que es admisible) se le asigna el número racional r_{a_n}.

Los elementos de M son los generadores de número real r_{a_1}, r_{a_2} . . . ; para todo generador de número real, c, puede encontrarse un miembro de M,m, tal de sea $c = m$; y en este sentido M representa el continuo de los generadores de número real.

(II) En el ejemplo I, añádase a Λ_M la condición de que $0 < r_{a_n} < 1$ para todo n; ahora M representa los generadores de número real, x tales que $0 \not> x \not> 1$.

(III) En el ejemplo II, añádase a Λ_M la condición de que

$$|1/2 - r_{a_m}| \leqslant |1/2 - r_{a_1}| \text{ para todo } n > 1.$$

ahora M representa los generadores de número real, y, tales que $0 < y < 1$.

(IV) Λ_M: es admisible toda sucesión que conste de 0s y 1s, con exclusión de todo otro número.
Γ_M: a la sucesión $a_1, \ldots, a_n$ se le asigna el número racional

$$\sum_{k=1}^{n} a_k 2^{-k};$$

M representa los generadores de número real dualmente explotables, x con $0 \not> x \not> 1$ (se llama a x dualmente explotable *dually developable* si para cualquier número de la forma $a/2^n = b$, pueden demostrarse o bien $x \not> b$ o bien $x \not< b$).

(V) Añádase al Λ_M del ejemplo IV la restricción de que $a_n = 0$ si n es impar. Entonces, M es un despliegue de generadores de número real semejante al discontinuo de Cantor.
Es evidente que modificando las restricciones incluidas en Λ_m podemos definir varios despliegues de generadores de número real.

(VI) Hagamos que Γ_M asigne a cualquier sucesión admisible, $a_1, \ldots, a_n$, su último número, a_n; en este caso, se dice de M que es un *despliegue desnudo;* y todo despliegue desnudo queda completamente definido por sólo su ley de despliegue.

Nota sobre la terminología. En sus primeras publicaciones, Brouwer empleó la palabra "Menge" [en alemán, conjunto] para lo que aquí llamamos despliegue; pero luego ha evitado términos tales como Menge, set [en ingl. conjunto], class [clase], y ensemble [en fr., conjunto], que insinúan la concepción —nada infrecuente en la teoría clásica— de que un conjunto está formado por la totalidad de sus elementos, y ha introducido la palabra "despliegue" (en ingl., "spread"; en holandés, "spreiding"; en fr., "déploiement"). En el próximo apartado introduciremos otro concepto, también análogo al concepto clásico de conjunto, bajo el nombre de "especie". Voy a seguir la terminología de Brouwer, esto es, voy a emplear sin rigor formal la palabra "conjunto" en los párrafos de carácter explicativo, cuando compare la teoría intuicionista con la clásica.

3.2. Las especies

3.2.1. *Definición de especie*

Hay dos maneras de definir intuicionísticamente un conjunto: I) mediante un modo común de generación de sus elementos, caso que tiene su realización en los despliegues; y II) mediante una propiedad característica de sus elementos; y a los conjuntos de esta índole se les llama especies [*species*].

Definición 1. Una *especie* es una propiedad que pueda suponerse que poseen ciertas entidades matemáticas [L.E.J. Brouwer 1918, p. 4; 1924, p. 245; 1952, p. 142].

Definición 2. Una vez que se haya definido una especie, E, cualquier entidad matemática que se haya (o se pueda haber) definido antes de E y que satisfaga la condición E será un *miembro* de la especie E.

3.2.2. *Ejemplos de especies*

(I) Los generadores de número real que coincidan con un generador de número real dado forman una especie (o, con mayor exactitud: la propiedad de coincidir con un generador de número real dado es una especie; y toda definición de especie que se dé de aquella forma deberá transponerse del mismo modo); de esta especie se dice que es un *número real.* Si x es un número real y si el generador de número ξ es uno de sus miembros, diremos que ξ *representa* x, y también que ξ *coincide con* x.

(II) Las ssppii iguales a los elementos de un despliegue, M, forman una especie, que será la *especie de despliegue* correspondiente, E_M.

(III) Todos los números reales forman una especie, que no está definida como especie de despliegue, y que es el *continuo* (monodimensional, de los números reales).

(IV) Los componentes de una spi de números naturales, ξ, forman una especie a la que, por brevedad, identificaremos con ξ.

3.2.3. *El tipo de las especies*

CLAS. ¿No es necesario para evitar las definiciones circulares, introducir una jerarquía de tipos de especies análoga a la de *Principia Mathematica*?

[N. Las definiciones circulares quedan excluidas por la condición de que los miembros de toda especie, E, hayan de definirse independientemente de la definición de E; condición que es obvia

desde el punto de vista constructivo. Y es cierto que ello hace pensar en una ordenación de especies que se parece a la jerarquía de los tipos: a las sucesiones que se prolongan infinitamente y a las especies de despliegue se les llama también especies de *tipo cero*; y toda especie cuyos miembros sean especies de tipo cero será de *tipo uno*.

Definición 1. Una especie es de tipo n si todos sus miembros tienen tipo inferior a n y al menos uno de ellos es de tipo $n-1$.

Los ejemplos I, II y IV son de tipo 0; el III es de tipo 1.

3.2.4. *Las subespecies*

La noción de subespecies de una especie dada no ofrece dificultad alguna. Voy a emplear los signos $\in$, $\cup$ y $\cap$ con el significado que se les atribuye habitualmente: $E \subseteq H$ significa que todo miembro de E es también miembro de H, y $E = H$ (E es *igual* a H) si $E \subseteq H$ y $H \subseteq E$; $a \notin E$ significa que es imposible que a sea un miembro de E; si H es una subespecie de E, $E - H$ es la especie de los elementos de E que no puedan pertenecer a H.

Si $H \subseteq E$, no siempre es $E' = H \cup (E - H)$ idéntica a E ya que en E' se encontrarán sólo aquellos elementos de E para los que pueda solventarse si pertenecen o no a H. Por ejemplo, si E es la especie de los números reales y H la de los números racionales, $E - H$ será la especie de los números negativamente irracionales; y en el caso de un número real tal como la constante C de Euler, que no se sabe si es irracional o no, no se puede decir que pertenezca a $H \cup (E - H)$.

Definición 1. Si las especies E y H poseen la propiedad de que E no puede contener ningún elemento que no pertenezca a H y H no puede contener ningún elemento que no pertenezca a E, E y H son especies *congruentes* [L.E.J. Brouwer 1924, p. 246].

Teorema. Si H es una subespecie de E, se tiene que $E' = H \cup (E - H)$ es congruente con E.

Demostración. Como $E' \subset E$, sólo necesitamos demostrar que E no contiene ningún elemento que no pertenezca a E'. Supóngase que $a \in E$ pero $a \notin E'$; entonces, $a \notin H$, de modo que $a \in E - H$, por lo cual $a \in E'$, que contradice la hipótesis $a \notin E'$; por consiguiente, para todo elemento, a, de E, es imposible que $a \notin E'$

Definición 2. Si $H \subseteq E$ y $H \cup (E - H)$ es igual a E, H es una subespecie *desgajable* de E, y E se *escinde* en E y $E - H$ [L.E.J. Brouwer 1924, p. 247].

CLAS. Eso equivale a decir que podremos solventar para todo elemento de E la cuestión de si pertenece o no a H. Es evidente que

si H es una subespecie desgajable de E, $E - H$ es también una subespecie desgajable de E.

IN. Permítame presentar algunos ejemplos.

La especie de los números pares positivos es una subespecie desgajable de la especie de los números naturales, N.

No sabemos si la especie de los exponentes, n, para los que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ tiene soluciones enteras no triviales constituye o no una subespecie desgajable de N.

Más adelante (3.4.3, Teor. 2) veremos que el continuo no posee otras subespecies desgajables que él mismo y la especie nula.

3.2.5. *La relación de equivalencia entre especies*

Como es habitual, se dice de dos especies entre las que se haya establecido una correspondencia biunívoca que son especies *equivalente*. Como hemos observado en 2.1, la construcción de un número natural, n consiste en formar sucesivamente los números de 1 a n; pues bien, esos números formarán la especie $1 \to n$. Una especie *finita* es una especie que sea equivalente a $1 \to n$ para algún número natural n.

Definición 1. Una especie equivalente a la de todos los números naturales, N, es *infinita numerable* [denumerably infinite].

Definición 2. Se llama *infinita* a toda especie que contenga una especie infinita numerable.

Por consiguiente, una especie que no pueda ser finita no tiene necesariamente que ser infinita.

Definición 3. Se llama *enumerable* [numerable] a toda especie equivalente a una subespecie desgajable de N [L.E.J. Brouwer 1918, p. 7; 1924, p. 248] [A. Heyting 1929, p. 51].

Ejemplo. La especie de los primos gemelos, $(p, p + 2)$, es enumerable, aunque nadie sabe si es finita o infinita.

No voy a entrar en la teoría de los números cardinales, que es muy distinta de la teoría clásica [L.E.J. Brouwer 1924], entre otras cosas en que dos especies no tienen por qué ser comparables en cuanto a sus números cardinales. Pues es fácil dar un ejemplo de una especie a cuyo respecto se desconozca si es la especie nula, una especie finita o una infinita.

CLAS. La especie de los números, n, tales que el n-ésimo hasta el $(n + 9)$-ésimo dígitos de π formen la sucesión 0123456789 constituye un ejemplo de ese tipo.

IN. Una consecuencia inmediata de 3.4.5, Teor. 2, es que el continuo no es infinito numerable.

3.3. Aritmética de los números reales

3.3.1. *Las relaciones y operaciones para los números reales*

En 2.2 nos hemos ocupado de la aritmética de los generadores de número. Ustedes mismos pueden dar fácilmente las definiciones de igualdad y de desigualdad entre números reales, así como la demostración de las principales propiedades de tales relaciones. Una vez que se han dado (de la manera que es obvia) las definiciones de las operaciones aritméticas, los teoremas de la aritmética de los números reales son consecuencia inmediata de los referentes a los generadores de número real; también les dejo a ustedes el llevar a cabo esta tarea.

3.3.2. *Los intervalos*

Definición 1. Si a y b son números reales, el *intervalo cerrado* $[a, b]$ es la especie de los números reales, x, tales que es imposible que $x > a$ y $x > b$, y también que es imposible que $x < a$ y $x < b$.

Nota. Es preciso dar la definición de esta forma tan complicada porque puede suceder que no sepamos cuál es el mayor entre a y b.

Teorema 1. Si máx$(a, b) = c$ y mín$(a, b) = d$, $[a, b] = [d, c]$.

Demostración. Hemos visto en 2.2.7, Teor. 3, que $(x > a$ y $x > b)$ equivale a $x > c$, cosa que equivale a $(x > c$ y $x > d)$; así pues, la imposibilidad de $(x > a$ y $x > b)$ equivale a la de $(x > c$ y $x > d)$. Por un argumento análogo con d en lugar de c, vemos que $x \in [a, b]$ equivale a $x \in [d, c]$.

Teorema 2. Si $a \not> b$, $[a, b]$ es la especie de los números reales, x, que satisfacen $(x \not< a$ y $x \not> b)$.

Demostración. Aunque esta demostración es muy sencilla, podría parecer difícil a las personas no acostumbradas al razonar intuicionista, y por ello la presento con cierto detalle. Supongamos primero que $x \not< a$ y $x \not> b$; de $x \not< a$ se sigue *a fortiori* que $(x < a$ y $x < b)$ es imposible; y análogamente, de $x \not> b$ se sigue que $(x > a$ y $x > b)$ es imposible; luego $x \in [a, b]$.

Supongamos ahora que $x \in [a, b]$ y admitamos por un momento que $x < a$; entonces, como $a \not> b$, tendremos $x < b$, con lo cual se tendría $(x < a$ y $x < b)$; pero esto es imposible por hipótesis. Así hemos demostrado que $x \not< a$; y podemos demostrar de forma análoga que $x \not> b$.

Corolario. Si máx$(a, b) = c$ y mín$(a, b) = d$, $[a, b]$ es la especie de los números reales, x, que satisfacen $x \not> c$ y $c \not< d$.

3.3.3. *Los generadores canónicos de número*

A menudo resulta cómodo representar un número real mediante un generador de número que tenga una forma sencilla. Hagamos que el número real x esté dado por el generador de número $\{r_n\}$; podemos ahora encontrar un k tal que $|x - r_k| < 2^{-n-3}$, y luego podemos determinar un entero, x_n, tal que $|r_k - x_n\ 2^{-n}| \leqslant 2^{-n-1}$, de suerte que

$$|x - x_n 2^{-n}| < {}^5/_8\ 2^{-n}. \tag{1}$$

si hacemos esto para todo n, obtenemos un generador de número, $\{x_n 2^{-n}\}$, que coincide con x y que tiene la propiedad de que

$$|x_n 2^{-n} - x_{n+1} 2^{-n-1}| < {}^5/_8\ 2^{-n} + {}^5/_{16}\ 2^{-n} = {}^{15}/_{16}\ 2^{-n};$$

lo cual implica que

$$|x_n 2^{-n} - x_{n+1} 2^{-n-1}| \leqslant 2^{-n-1}. \tag{2}$$

Definición. Llamaremos generador canónico de número a todo generador de número de la forma $\{x_n 2^{-n}\}$, siendo todo x_n entero y tal que satisfaga (2).

Con lo cual hemos demostrado:

Teorema 1. Todo número real, x, coincide con un generador canónico de número real, $\{x_n 2^{-n}\}$, que satisface (1).

No cabe duda, teniendo en cuenta su demostración, de que en (1) es posible reemplazar el factor 5/8 por $\frac{1}{2} + \epsilon_n$, siendo $\epsilon_n > 0$.

3.4. La continuidad y la inducción trabada de los despliegues

3.4.1. *La continuidad*

El concepto de spi es una extensión del de sucesión dada por una ley; y, con objeto de sacar partido de esta ampliación del concepto de sucesión, tenemos que buscar algunos principios que se revelen a la reflexión como válidos para ssppii, si bien no tengamos razones suficientes para aseverarlos en lo que se refiere a las sucesiones dadas por una ley. Brouwer ha descubierto dos principios de este tipo; más para enunciarlos en forma concisa, conviene introducir las expresiones que siguen (véase también 3.1.2.): $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}$ (siendo $k \geqslant 1$) es un *descendiente* de $a_1, \ldots, a_n$, y esta última sucesión es un *antecesor* de la primera; la spi $\alpha = a_1, \ldots, a_n, \ldots$ es una *continuación* de la sucesión finita $a_1, \ldots, a_n$, y esta sucesión es un *segmento* de α; finalmente, si α es un elemento del género K, es una continuación en K de $a_1, \ldots, a_n$. Enunciemos ahora el primer principio de Brouwer.

Principio de continuidad. Sean E una especie desnuda y Φ una

aplicación o proyección de E en los números naturales; entonces, existe un algoritmo que computa $\Phi\alpha$, para toda α de E, a partir de un segmento finito de α; y además, para una sucesión admisible dada, $a_1, \ldots, a_n$, es solventable la cuestión de si basta computar $\Phi\alpha$ para cualquier α que comience por $a_1, \ldots, a_n$.

Podemos dar una justificación intuitiva de este principio en tres pasos. I) Φ tiene que estar dada por alguna prescripción, esto es, por un algoritmo con el que se compute $\Phi\alpha$, y, en realidad en la demostración de que $\Phi\alpha$ está definida para toda α de E ha de aparecer semejante algoritmo; II) como, en general, en un instante dado no necesitamos conocer más que un segmento inicial de una sucesión electiva, dicho algoritmo tiene que permitirnos que efectuemos la computación a partir de elementos iniciales exclusivamente; y III) en el concepto de algoritmo se encuentra implícito que seamos capaces de solventar la cuestión de si un segmento inicial dado basta o no para llevar a cabo tal cómputo.

Observación. Naturalmente, puede ocurrir que $\Phi\alpha$ tenga el mismo valor para toda continuación en E, α, del segmento finito $a = a_1, \ldots, a_m$, mientras que aquel algoritmo proporcione tal valor solamente para un descendiente, $a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_n$, el cual puede ser distinto para distintas continuaciones de a. No es necesario que sea solventable el problema de si a posee o no tal propiedad.

3.4.2. *La inducción trabada*

Sean, Λ la ley de despliegue del despliegue desnudo D, y F la especie de las sucesiones finitas admisibles por Λ, a las que se añadirá la sucesión vacía.

Definición. Sea P una subespecie desgajable de F. La sucesión a de F está *trabada en D* [*D-barred*] por P si toda continuación en D de a tiene un segmento en P; y P es una *traba* [*bar*] en D si la sucesión vacía está trabada en D por P.

El segundo principio de Brouwer es:

Principio de la inducción trabada. Sea P una traba en D, y hagamos que Q sea una subespecie de F que contenga a F y que satisfaga la condición (*):

(*) si todos los descendientes inmediatos en F de una sucesión de F, a, pertenecen a Q, también a pertenece a Q;

entonces, la sucesión vacía pertenece asimismo a Q.

Brouwer ha justificado este principio preguntando cómo podemos llegar a percatarnos del hecho de que P sea una traba en D; pues bien, sólo podemos saberlo mediante una demostración, $\mathfrak{R}$, que se base en los datos que siguen:

(I) las especies F y P, y

(II) las relaciones que existan entre una sucesión de F y sus descendientes inmediatos en F;

así pues, $\mathfrak{R}$, cuando se la exponga sin abreviaciones, constará de un número finito de inferencias, cada una de las cuales será o bien una inferencia ζ o una inferencia $\digamma$, estando estas últimas definidas como sigue:

inferencia ζ: para cierta sucesión de F, a, el antecesor inmediato de a estará trabado en D por P, de modo que a estará igualmente trabada en D por P;

inferencia $\digamma$: para cierta sucesión de F, a, todo descendiente inmediato de a en F estará trabado en D por P, por lo que a estará también trabada en D por P.

La última inferencia de $\mathfrak{R}$, que afirmará que la sucesión nula está trabada en D por P, tiene que ser una inferencia $\digamma$, por lo cual la condición de traba (o sea, la propiedad de estar trabada en D por P) de toda sucesión unimembre habrá de estar demostrada antes de demostrarse la de la sucesión vacía; de ahí que, si es que la condición de traba de una sucesión unimembre se demuestra mediante una inferencia ζ, se la habrá demostrado en $\mathfrak{R}$ ya antes, y la primera vez se la habrá demostrado mediante una inferencia $\digamma$. De lo cual se sigue que toda inferencia ζ que demuestre la condición de traba de una sucesión unimembre es superflua; y además, la demostración de la condición de traba de una sucesión unimembre tiene que estar precedida por la demostración de esta misma condición en cuanto a sus descendientes inmediatos. Repitiendo la misma argumentación para sucesiones bimembres, y así sucesivamente, demostraremos por inducción que es posible eliminar de $\mathfrak{R}$ todas las inferencias ζ; y al hacerlo habremos obtenido una nueva demostración, $\mathfrak{R}'$. Todavía más: podemos omitir de $\mathfrak{R}'$ toda inferencia $\digamma$ que demuestre la condición de traba de una sucesión que pertenezca a P o tenga un antecesor en P, o bien que se haya demostrado ya antes en $\mathfrak{R}'$ que está trabada por P; y con todas estas simplificaciones obtenemos una demostración que llamaremos $\mathfrak{R}''$. Modifiquemos ahora $\mathfrak{R}''$ sustituyendo toda inferencia del tipo "a pertenece a P, luego está trabada en D por P" por esta otra, "a pertenece a Q", y toda inferencia $\digamma$ del tipo "todo descendiente inmediato de a está trabado en E por P, luego a está trabada en D por P" por "todo descendiente inmediato de a pertenece a Q, luego a pertenece a Q"; como se cumplen $P \subseteq Q$ y (*), obtenemos así una demostración válida, $\mathfrak{R}^*$; y dado que la conclusión de $\mathfrak{R}''$ era que la sucesión vacía está trabada en D por P, la de $\mathfrak{R}^*$ será que la sucesión vacía pertenece a Q.

FOR. Lo que más sorprende de esta demostración es la frase "Evidentemente, tenemos que darnos cuenta del hecho de que toda sucesión de F estará trabada en D por P; y lo haremos mediante una demostración, $\mathfrak{R}$, que se base en los datos del teorema"(3): parece que deducimos ahora un resultado matemático mediante métodos que en la terminología de formalismo se llamarían metamatemáticos.

Es cierto que el empleo de la metamatemática para la deducción de resultados matemáticos no es nada nuevo: el ejemplo más sencillo es el principio de dualidad en la geometría proyectiva, y A. Tarski, Abraham Robinson y Leon Henkin han hecho recientemente importantes aplicaciones de tal método al álgebra (véanse, por ej., [A. Tarski 1950]' [L. Henkin 1953] y [A. Robinson 1951]); pero es digno de advertirse que los intuicionistas empleen unos métodos semejantes, ellos que se oponen a la formalización estricta y que, por lo tanto, no pueden construir una metamatemática en sentido estricto.

IN. Esa es una cuestión muy importante, que se refiere a la índole de las demostraciones intuicionistas en general. Tiene usted razón al decir que no se puede mantener la distinción entre la matemática y la metamatemática si no se lleva a cabo una formalización estricta de las matemáticas; y tal vez sea útil la siguiente observación para aclarar en qué respecto se diferencia la demostración del teorema del abanico (4) de otras demostraciones. En todo teorema matemático se hace referencia a construcciones anteriores; por tomar un ejemplo al azar. fiiémonos en 2.2.5, Teor. 2 (para números reales a, b y c, $a \# b$ implica $a + c \# b + c$): aquí, la hipótesis $a \# b$ no se refiere a ningún supuesto hecho, sino a una supuesta construcción de números naturales, n y k, que satisfagan 2.2.3, Def. 1, y el teorema afirma que esta construcción puede completarse de tal modo que se obtengan números naturales que satisfagan esa misma definición, pero con $a + c$ y $b + c$ en lugar de a y b, respectivamente; ahora bien, en casi todos los casos, lo que desempeña un papel en la demostración no es esa misma supuesta construcción, sino sólo su resultado; y el rasgo nuevo que presenta la demostración del teorema del abanico es que en ella entra explícitamente la forma posible de la supuesta construcción. Si nos percatamos bien de que la hipótesis de un teorema consiste siempre en suponer la ejecución previa de cierta construcción, no podremos objetar nada al empleo de consideraciones sobre la manera de realizar semejante construcción como medio de demostrarlo.

Con todo, ha de concederse que la argumentación de Brouwer no es una demostración en sentido estricto, ya que las consideraciones sobre la forma posible de la demostración de que P es una traba no son, por su parte, más sencillas que el principio a justificar: tales consideraciones nos ayudan a esclarecer el contenido intuitivo de este principio. Otra manera de mirar la cosa es entender que Brouwer da una definición de qué es lo que constituye una demostración del enunciado que afirma que P es una traba en E.

Recientemente se ha dedicado mucha atención a cómo formalizar el análisis intuicionista (incluida la teoría de las ssppii), trabajos a los que sólo puedo referirme indicando la bibliografía al efecto. Mencionaré en particular Spector [1962], Kleene y Vesley [1965], Howard y Kreisel [1966], Kreisel [1968 y 1968A], Myhill [1968], Troelstra [1968 y 1969] y Kreisel y Troelstra [1970]; Troelstra [1969] presenta un panorama del tema con una buena bibliografía (5).

3.4.3 *Los despliegues finitarios*

Definición. Un despliegue, M, es finitario (es un *abanico*) si su ley de despliegue, Λ_M, es tal que sólo sea admisible un número finito de sucesiones unimembres y que, para toda sucesión admisible, $a_1, \ldots, a_n$, haya sólo un número finito de valores de k tales que $a_1, \ldots, a_n, k$ sea una sucesión admisible.

LET. Me pregunto si "finitario" es un neologismo.
IN. Kleene ha empleado esta palabra para un concepto muy parecido. En cuanto a "abanico" [*fan*], creo prudente ser muy parsimonioso en la introducción de semejantes términos nuevos en las matemáticas, pero la idea de despliegue finitario resultará de tal importancia que es conveniente tener una breve palabra para ella.

Teorema 1. Todo intervalo cerrado del continuo coincide con un despliegue finitario [L.E.J. Brouwer 1919A, p. 14; 1924B. p. 192].

Demostración. Supongamos que se nos dan dos números reales, a y b, y hagamos máx$(a, b) = c$ y mín$(a, b) = d$; entonces, $[a, b] = [d, c]$. Como en 3.3.3, construimos los generadores canónicos de número $\{d_n 2^{-n}\}$ y $\{c_n 2^{-n}\}$, que coinciden respectivamente con d y c; y podemos suponer que $d_n \leqq c_n$, ya que, si $d_n > c_n$, se ve fácilmente que $|d - c_n 2^{-n}| < 5/8^{2-n}$.

Fijémonos en el despliegue, D, de las ssppii $\{x_n 2^{-n}\}$ para las que x_n satisfaga.

$$(1) \qquad d_n \leqq x_n \leqq c_n;$$

una vez elegido x_n hay como mínimo uno y como máximo tres valores admisibles para x_{n+1}, luego D es finitario. Voy a mostrar que D coincide con $[a, b]$: (1) hace ver que todo elemento de D coincide con un elemento de $[d, c]$; conversamente, sea x cualquier elemento de $[d, c]$, y hagamos que $\{x_n 2^{-n}\}$ sea una spi canónica que coincida con x; como antes, podremos suponer que $d_n \leqq x_n \leqq c_n$, luego x coincide con un elemento de D.

3.4.4. *Teorema del abanico*

Teorema. Si una función de valores enteros, $\varphi(\delta)$, está definida para todo elemento, δ, de un despliegue finitario D, partiendo de la definición de φ es posible computar un número natural, N, tal que $\varphi(\delta)$ quede determinada por los N primeros componentes de δ; esto es, si δ_1 y δ_2 son unos elementos de D tales que los primeros N componentes de δ_1 sean iguales a los N primeros componentes de δ_2, se tiene $\varphi(\delta_1) = \varphi(\delta_2)$ [L.E.J. Brouwer 1923, p. 4; 1924B, p. 192; 1924D, p. 646; 1926, p. 66; 1952, p. 143, y 1954 p. 15].

Demostración. Sean, Λ la ley de despliegue de D, y F la especie de las sucesiones finitas admisibles en virtud de Λ (a las cuales se añadirá la sucesión nula); y sea K el despliegue finitario de las ssppii admisibles en virtud de Λ. Si d es el elemento de K al que esté vinculado δ mediante Γ_D, haremos $\varphi(\delta) = f(d)$; entonces, f estará definida para todo elemento de K. Por el principio de continuidad, la $f(d)$ para un d dado tendrá que quedar determinada por un segmento finito de d, segmento al que podremos llamar $a(d)$, y la especie, P, de los $a(d)$ que correspondan de este modo a los elementos de K será una subespecie desgajable de F; además, evidentemente, P es una traba en K. Vamos a definir como sigue cierta subespecie, Q, de F: a pertenecerá a Q si puede encontrarse un número natural, $N(a)$, tal que, para toda continuación en K de a, d, los $N(a)$ primeros componentes de d determinan $f(d)$. Tenemos además que $P \subseteq Q$, pues si $a \in P$, resulta que $N(a)$ es igual a la longitud de a. Por otra parte, Q cumple la condición (*) de 3.4.2, ya que si todo descendiente inmediato en F de a pertenece a Q, se tiene que $N(a) = \text{máx}\, N(b)$, en donde b recorre los descendientes inmediatos en F de Q, cuyo número es finito. Finalmente, aplicando el principio de la inducción trabada encontraremos un número, N, tal que, para todo d de K, $f(d)$ quede determinado por los N primeros componentes de d; luego $\varphi(\delta)$ estará determinado por los N primeros componentes de δ.

Aplicaciones del teorema del abanico

3.4.5. *La continuidad de funciones*

La aplicación más sobresaliente del teorema del abanico es el

Teorema 1. Una función de valores reales, $f(x)$, que esté definida por dondequiera en un intervalo cerrado del continuo es uniformemente continua en dicho intervalo [L.E.J. Brouwer 1923, p. 5; 1924B y D; 1926A, p. 67; 1954, p. 17].

Demostración. Por 3.4.3, Teor. 1, el intervalo $[a, b]$ coincide con un abanico, D; además, a todo elemento de D, ξ, le está asociado un número real, $y = f(\xi)$, e y coincide con un generador canónico de número, $\eta = \eta_n 2^{-n}$. Para un valor fijo de n, asociamos η_n a ξ, y de esta forma obtenemos una función de valores enteros en D; luego por el teorema del abanico puede encontrarse un número, $N(n)$, tal que, para todo ξ de D, η_n esté determinado por los primeros N componentes de ξ.

Hagamos que x_1 y x_2 sean números reales de $[a, b]$ tales que $|x_1 - x_2| < 2^{-N-2}$; entonces, x_1 y x_2 coincidirán con unos generadores canónicos de número, ξ_1 y ξ_2, cuyos primeros N componentes

sean iguales; de ello se sigue que η_n es el mismo para ξ_1 y ξ_2, y, en consecuencia, que

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < 5/4\ 2^{-n}.$$

Así hemos demostrado que si $|x_1 - x_2| < 2^{-N-2}$, se tiene $|f(x_1) - f(x_2)| < 5/4\ 2^{-n}$; es decir, que $f(x)$ es uniformemente continua en $[a, b]$.

Teorema 2. Una especie puntual [*pointspecies*] que sea una subespecie desgajable de un intervalo cerrado, o bien será la especie nula o la totalidad del intervalo [L.E.J. Brouwer 1926A, p. 66].

Demostración. Supongamos que la especie puntual Q sea una subespecie desgajable del intervalo I. La función $f(x)$, que es 1 si x pertenece a Q y 0 si pertenece a I-Q, está definida en todo punto de I, y por ello tiene que ser continua en I; lo cual significa que $f(x)$ ha de ser constante.

Teorema 3. Una función definida por dondequiera sobre un intervalo cerrado, I, tiene en I una mínima cota superior y una máxima cota inferior.

Demostración. De la demostración del teorema 1 se sigue que sólo existe un número finito de valores para η_n. Supongamos que ξ_n sea el menor de ellos, y hagamos $\xi_n 2^{-n} = z_n$; es fácil ver que $|z_n - z_{n+1}| \leqq 2^{-n-1}$, de modo que existe $\lim_{n\to\infty} z_n$, y es la m.c.i. de $f(x)$.

Teorema 4. Si una función está definida y es positiva por dondequiera sobre un intervalo cerrado, I, su m.c.i. es positiva.

Demostración. Como sucedía en la demostración del Teor. 1, a todo elemento, ξ, de D se le asocia un generador canónico de número, $\eta = \eta_n 2^{-n}$ (siendo $\eta > 0$), de modo que, para cierto valor, n_1, de n, se tiene $\eta_{n_1} > 0$. Por el teorema del abanico, puede encontrarse un número, M, tal que n_1 quede determinado por los M primeros componentes de ξ, con lo cual habrá sólo un número finito de valores para n_1; y sea n_0 el mayor de todos ellos; entonces, $z_{n_0} \geqq 2^{-n_0}$; además, para todo x, $f(x) > z_{n_0} - 5/8\ 2^{-n_0}$, luego la m.c.i. de $f(x)$ es positiva.

Observación. Puede ocurrir que no podamos aseverar que $f(x)$ alcanza su m.c.i. para un valor definido de x, como hace ver gráficamente el ejemplo que sigue.

$$f(x) = -3x^4 + 4cx^3 + 6x^2 - 12cx,$$

siendo c un número real a cuyo respecto desconozcamos si $c > 0$, $c = 0$ o $c < 0$;

$$f'(x) = -12(x+1)(x-1)(x-c);$$
$$f(-1) = 3 + 8c,\ f(1) = 3 - 8c,\ f(c) = c^4 - 6c^2.$$

la mínima cota inferior de $f(x)$ es $3 + 8|c|$, pero no sabemos si $f(x)$ toma este valor para $x = -1$ o para $x = 1$.

3.4.6. *El teorema de Bolzano-Weierstrass*

Brouwer ha investigado este teorema [L.EJ. Brouwer 1925B].

Fijémonos en el siguiente caso especial:

(A) Puede encontrarse un punto de acumulación para toda especie infinita acotada de números reales,

que es equivalente clásicamente a

(B) Toda especie acotada de números reales sin punto de acumulación es finita. Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ se defina como sigue: si entre los n primeros dígitos del desarrollo decimal de π no aparece ninguna vez la secuencia 0123456789, $a_n = 2^{-n}$; y si aparece semejante secuencia en los primeros n dígitos de π, $a_n = 1 - 2^{-n}$. La especie de los números reales a_n es infinita, pero nadie sabe si, en caso de existir un punto de acumulación, sería 0 ó 1; así pues, en la actualidad no estamos en condiciones de demostrar (A) intuicionísticamente.

En cuanto a (B), Brouwer ha hecho ver que ni siquiera cabe esperanza alguna de demostrar la proposición (C), que es más débil que ella (y que presento enseguida). En 8.1.3 reproduciré su argumentación.

Definición. Una especie, E, está *acotada en número* si se conoce un número natural, n, tal que E no pueda contener ninguna subespecie de n elementos.

Observación. Toda especie finita está acotada en número, pero la la proposición conversa no tiene por qué ser verdadera.

(C) Toda especie acotada de números reales sin punto de acumulación está acotada en número.

Con todo, hay ciertas versiones más débiles de (A) y de (C) que son verdaderas.

Teorema 1. Sea Q una especie infinita acotada de números reales, y sean m y n números naturales; entonces existe un intervalo de longitud 2^{-n} que contiene por lo menos m elementos de Q.

Demostración. Sean h y k unos enteros tales que Q se encuentre incluida en el intervalo (h, k); hagamos

$r = (k - h + 1)2^{n+1}$, y sea R una subespecie de Q con rm elementos. Para cada elemento, x, de R, determinaremos un entero, x_{n+1}, tal que $(x_{n+1} - 1)2^{-n-1} < x < (x_{n+1} + 1)2^{-n-1}$; como el número de estos intervalos, que se solapan con (h, k), es r, al menos uno de ellos contiene m o más elementos de R.

Teorema 2. Si Q es una especie acotada de números reales con la propiedad de que para todo número real, x, sea posible encontrar un número natural, $r(x)$, tal que el intervalo $(x - 2^{-r}, x + 2^{-r})$ no pueda contener dos miembros distintos de Q, ésta (o sea, Q) está acotada en número.

Demostración. Supongamos que Q se encuentre dentro del intervalo (h, k); entonces, el intervalo $(x - 2^{-r}, x + 2^{-r})$, siendo $x \in [h, k]$, contiene un intervalo $i(a, r) = (a, 2^{-r-1}, (a + 2)2^{-r-1})$, siendo a un entero, y tal que $i(a, r)$ contenga x.

Sea J el abanico puntual canónico [véase 5.1.2, Def. 2 (I)] que coincida con $[h, k]$. Como a todo elemento, ξ, de J le están asociados los enteros $r(\xi)$ y $a(\xi)$, el teorema del abanico nos permite encontrar un m tal que $r(\xi)$ y $a(\xi)$ sólo dependan de las m primeras elecciones efectuadas en ξ; por consiguiente, existe únicamente un número finito (s digamos) de intervalos distintos $i(a, r)$ que entre todos cubran $[h, k]$; y como ningún $i(a, r)$ contiene dos elementos distintos de Q, no puede existir ninguna subespecie de Q con $s + 1$ elementos.

IV. ALGEBRA

4.1. Los campos algebraicos

No voy a tratar aquí sistemáticamente el álgebra intuicionista [A. Heyting 1941]; lo que pretenden principalmente los fragmentos que siguen, pues, es mostrar las aplicaciones de la teoría de números reales; pero no ofrece dificultades formularlos para el caso de un campo albegraico abstracto.

4.1.1. *Las relaciones de separación*

En todo campo ha de definirse la división, y, según hemos visto, para los números reales ésta sólo es posible si el divisor está separado de 0; de donde se sigue que en la definición de campo será esencial una relación de separación.

Definición. Llamaremos relación de separación a una relación simétrica, #, entre los elementos de una especie, E, en caso de que posea las siguientes propiedades (I) a (III) (compárense con 2.2.3); a, b... serán elementos de G;

(I) si $a \# b$, $a = b$ es imposible;

(II) si $a \# b$ es imposible, $a = b$;

(III) si $a \# b$, para todo elemento, c, de E, o bien $a \# c$ o $b \# c$.

4.1.2. *Definición de campo*

Una especie matemática, C, es un *campo* si tiene las siguientes propiedades: R, A1, A2, M1, M2 y M3.

R. En C está definida una relación de separación, #.

A1. En C está definida una adición conmutativa y asociativa; C contiene un elemento cero y el negativo de cualquiera de sus elementos.

A2. Si $a \# b$, para todo elemento, c, de C, $a + c \# b + c$.

M1. En C está definida una multiplicación conmutativa y asociati-

va, que es distributiva con respecto a la adición; y C contiene un elemento unidad, 1, teniéndose $1 \# 0$.

M2. Si $a \# 0$, existe su recíproco, a^{-1}, y $a^{-1} \# 0$.

M4. Si $a \# b$ y $c \# 0$, se tiene $ac \# bc$.

4.1.3. *Propiedades de la relación de separación en los campos*

Teorema 1. $ab \# 0$ entraña $a \# 0$ y $b \# 0$.

Demostración. Si $ab \# 0$, o bien $a \# 0$ o $ab \# a$. En caso de que $a \# 0$, *también se tendrán* $a^{-1} \# 0$ y $(ab)a^{-1} \# 0$ o sea, $b \# 0$. Supongamos ahora que $ab \# a$, esto es, que $a(b - 1) \# 0$; entonces, $1 \# 0$ nos da que o bien $b \# 0$ o $b - 1 \# 0$; si $b \# 0$, también $b^{-1} \# 0$ y $(ab)b^{-1} \# 0$, $a \# 0$; y de la misma manera se trata el caso $b - 1 \# 0$.

Teorema 2. $a + b \# 0$ implica que o bien $a \# 0$ o $b \# 0$.

Demostración. Como la de 2.2.5, Teor. 5.

Teorema 3. Si $ab \# cd$ o bien $a \# c$ o $b \# d$.

Demostración. $ab - cd \# 0$; $a(b - d) + d(a - c) \# 0$; por el Teor. 2 y el Teor. 1, o bien $b - d \# 0$ o $a - c \# 0$.

Teorema 4. Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es un polinomio con coeficientes en el campo C y si $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ son elementos de C tales que $f(p_1, \ldots, p_n) \# f(q_1, \ldots, q_n)$, para al menos un valor del subíndice i se tiene $p_1 \# q_i$.

Demostración. Aplicando reiteradamente el Teor. 2 encontraremos un término, $cx_1^{a1} \ldots x_n^{an}$, de $f(x_1, \ldots, x_n)$ tal que $cp_1^{a1} \ldots p_n^{a1} \# cq_1^{a1} \ldots q_n^{an}$; y luego asentaremos el teorema aplicando reiteradamente el Teor. 3.

FOR. Esta teoría de los campos algebraicos es esencialmente una teoría axiomática.

IN. Hace ver gráficamente cómo puede aplicarse en las matemáticas intuicionistas el método axiomático; pero no debemos olvidar que éste no desenpeña papel alguno en los fundamentos de las matemáticas: no es sino una manera cómoda de presentar una teoría en la que haya muchos teoremas que posean un mismo y complejo sistema de suposiciones.

4.2. Las ecuaciones lineales

La teoría de las ecuaciones lineales permite ver claramente la forma en que es posible hacer más precisas las teorías clásicas.

4.2.1. *La regla de Cramer*

Sea d el determinante de los coeficientes de los primeros miembros de las ecuaciones.

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

si $d \neq 0$, es posible resolver (1) mediante la regla de Cramer:

$$x_k = \frac{d_k}{d} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Esta solución es única en el siguiente sentido, sumamente preciso:

Teorema 1. Si $p_1, \ldots, p_n$ son números tales que para cierto valor de r se tenga $p_r \neq d_r/d$, es posible encontrar un subíndice, i, tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_k \neq b_i .$$

Demostración. Hagamos que m_{ik} denote el menor de los a_{ik} de d. Entonces tendremos sucesivamente.

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ir} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_k = dp_r ;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ir} b_i = d_r ;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ir} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_k \neq \sum_{i=1}^{n} m_{ir}b_i ;$$

luego, en virtud de 4.1.3, Teor. 2, para al menos un valor de i,

$$m_{ir} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_k \neq m_{ir}b_i ,$$

lo cual demuestra el teorema.

4.2.2. *Los sistemas de m ecuaciones en n variables, siendo conocido el rango.*

Consideremos un sistema de m ecuaciones en n variables,

$$(2) \qquad L_i \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Con objeto de resolver estas ecuaciones por alguno de los métodos usuales es necesario saber el rango, r, de la matriz $A = (a_{ik})$; además, tiene que ser posible su división por algún menor de r filas; por ello vamos a definir con mayor precisión el concepto de rango:

Definición 1. La matriz A es de *rango* r si al menos un menor de r filas de A esta separado de 0, mientras que todos sus menores de $r + 1$ filas son 0; si d es un menor de r filas y $d \# 0$, se dice que d es un *menor principal* de A.

Definición 2. Se obtiene un *determinante característico*, c_s, de (2) añadiendo a un menor principal, d, de A una fila con coeficientes de la s-ésima ecuación de (2) y la columna de los segundos miembros de (2).

Una condición necesaria y suficiente para que (2) tenga solución es que todo determinante característico sea 0; necesidad de esta condición que podemos enunciar de una manera más precisa del siguiente modo:

Teorema 1. Si hay algún determinante característico $c_s \# 0$, existe, para valores arbitrarios $x_k = p_k$ (siendo $k = 1, \ldots, n$), un valor de i tal que $L_k(p_1, \ldots, p_n) \# b_i$.

Demostración. Supongamos que el menor principal es

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \text{ y que } c_s = \begin{vmatrix} & d & & b_1 \\ & & & \vdots \\ & & & b_r \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} & b_s \end{vmatrix} \# 0.$$

Tomemos valores arbitrarios, $x_1 = p_1, \ldots, x_n = p_n$; sustituyendo ahora $x_{r+1} = p_{r+1}, \ldots, x_n = p_n$ en las r primeras ecuaciones y resolviéndolas para $x_1, \ldots, x_r$, obtenemos $x_1 = q_1, x_r = q_r$; esto es,

$$L_s(q_1, \ldots, q_r, p_{r+1}, \ldots, p_n) - b_s = -c_s/d \# 0.$$

Así pues, o bien

$$L_s(p_1, \ldots, p_r, p_{r+1}, \ldots, p_n) \# b_s,$$

o, en virtud de 4.1.3., Teor. 4, para al menos un valor de k $(1 \leqq k \leqq r)$, $p_k \# q_k$; en este último caso, en virtud del Teor. 1, para al menos un valor de i $(1 \leqq i \leqq r)$, tendremos

$$L_i(p_1, \ldots, p_r, p_{r+1}, \ldots, p_n) \# b_i.$$

Si $c_s = 0$ (siendo $s = r + 1, ..., m$), el sistema (2) tiene una solución de la forma

$$x_k = f_k(x_{r+1}, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, \ldots, r). \tag{3}$$

Esta solución es completa en el sentido preciso de esta palabra; o sea, si $(p_1, .., p_n)$ es un vector tal que, para cada vector $(q_1, ..., q_n)$ contenido en (3), $p_k \# q_k$ para al menos un valor de k, se tiene $L_i(p_1, ..., p_n) \# b_i$ para al menos un valor de i. La demostración de este teorema es análoga a la de 4.2.1, Teor. 1.

4.2.3. *Caso de desconocerse el rango*

Si las ecuaciones (2) son homogéneas y de rango r, se sigue que tienen una solución con $(n - r)$ parámetros que es completa en el sentido preciso de este término; en cambio, si no se conoce el rango, puede ocurrir que no encontremos ninguna solución aparte de la nula, incluso en caso de que todos los menores de n filas sean 0. Veamos, por ejemplo, la ecuación

$$ax + by = 0,$$

en la que a y b sean números reales tales que no se sepa si $a = 0$ o si $a \# 0$, así como tampoco si $b = 0$ o si $b \# 0$, desconociéndose asimismo la razón entre a y b. (Ejemplo: $a = \{a_n\}$, siendo $a_n = 2^{-n}$ si en los n primeros dígitos de π no aparece ninguna secuencia 0123456789, y $a_n = 2^{-k}$ si aparece dicha secuencia y 9 es el k-ésimo dígito de π; y b se define en forma análoga, pero con e en lugar de π). Si $a \# 0$ ó $b \# 0$, se tiene $(x = b, y = -a)$ como solución separada de (0, 0); y si $a = b = 0$, pueden elegirse números arbitrarios $\# 0$ para x y para y. Pero la primera solución no es aplicable en el segundo caso, ni tampoco la segunda solución en el primer caso; y mientras no sepamos en cuál de ellos nos encontramos, seremos incapaces de dar una solución.

4.2.4. *Las ecuaciones lineales homogéneas*

Para las ecuaciones

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

tenemos, como caso especial de 4.2.1, Teor. 1, el siguiente

Teorema 1. Si el rango de la matriz $A = (a_{ik})$ es n, para cuales-

quiera valores $u_1, \ldots, u_n$ tales que $u_k \# 0$ para al menos un valor de k, existe al menos un valor de i tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k \# 0 .$$

También la proposición conversa es verdadera:

Teorema 2. Si para cualesquiera valores $u_1, \ldots, u_n$ tales que $u_k \# 0$ para al menos un valor de k, al menos uno de los primeros miembros de (4) está $\# 0$, el rango de la matriz es n.

Demostración. Por inducción con respecto a n. Para una variable el resultado es trivial; demostrémoslo para ecuaciones en $n - 1$ variables. Haciendo $x_n = 0$ en (4), obtenemos ecuaciones en $x_1, \ldots, x_{n-1}$ que satisfacen la condición del teorema; luego por hipótesis la matriz de las $n - 1$ primeras columnas de A tiene rango $n - 1$. Supongamos que el determinante formado por las $n - 1$ primeras filas es $d \# 0$; resolvamos las primeras $n - 1$ ecuaciones haciendo $x_n = 1$ y sustituyamos el resultado en las demás ecuaciones de (4); entonces, el primer miembro de al menos una de ellas (la t-ésima, digamos) estará $\# 0$; y ese primer miembro será igual a un determinante de A con n filas dividido por d.

4.3. La dependencia lineal

4.3.1. *Definiciones*

Como es corriente, el espacio vectorial n-dimensional sobre C, C^n, es la especie de las sucesiones, $(a_1, \ldots, a_n)$, de elementos de C. Vamos a denotar los elementos de C^n mediante caracteres en negrita, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. La adición de vectores y la multiplicación de un vector por un elemento de C se definen de la manera usual; en cuanto a la noción de dependencia lineal, cabe definirla de dos maneras: en

$$(1) \qquad \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

podemos exigir que los coeficientes λ estén $\# 0$ o que sean $\neq 0$; lo cual nos proporciona, respectivamente, los conceptos de *dependencia fuerte* y *dependencia débil*; y como la primera es, con mucho, la más importante, "dependencia" sin adjetivo querrá decir dependencia fuerte. Llamaremos *independiente* a un sistema de vectores que no pueda ser dependiente; y, como en otros muchos casos, además de esta noción negativa podemos definir una positiva, que clásicamente será equivalente a aquélla. Creo que ustedes mismos pueden ya dar tal definición.

FOR. Si hay al menos un λ_i que $\neq 0$, se tendrá

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n \neq \mathbf{0}.$$

IN. En este caso diremos que los vectores son *libres* (unos con respecto a otros).

Teorema 1. Una condición necesaria y suficiente para que los vectores

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

sean libres es que su matriz sea de rango p; lo cual es una consecuencia inmediata de 4.2.4, Teors. 1 y 2.

4.3.2. *Un teorema y un contraejemplo*

El teorema que sigue exige para su validez una condición adicional.

Teorema 1. Si los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ son libres y los vectores $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{r+1}$ son también libres, al menos un vector $\mathbf{b}_i$ es libre con respecto a $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ (es decir, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}_i$ serán libres).

Demostración. La matriz de los $\mathbf{a}_j$ es de rango r; y podemos suponer que el determinante formado por sus r primeras columnas, d, está $\neq 0$. Determinemos los números λ_{sk} mediante las ecuaciones

$$b_{si} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{sk} a_{ki} \qquad \begin{matrix}(i = 1, \ldots, r; \\ s = 1, \ldots, r+1)\end{matrix},$$

y hagamos

$$\mathbf{c}_s = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{sk} \mathbf{a}_k \qquad (s = 1, \ldots, r+1).$$

Como los $\mathbf{b}_j$ son libres, existe un determinante, formado por sus componentes con subíndices $j_1, \ldots, j_{r+1}$, que está $\neq 0$; el correspondiente determinante formado mediante los c_{ik} es 0, de modo que podremos encontrar al menos un par de subíndices, t y u, tales que $b_{tu} \neq c_{tu}$. Formemos un determinante de $r+1$ filas ampliando d mediante la columna $a_{iu}, \ldots, a_{ru}, c_{tu}$ y la fila $c_{t1}, \ldots, c_{tr}, c_{tu}$; este determinante será 0, de suerte que, por tenerse $d \neq 0$, el correspondiente determinante con b en lugar de c estará $\neq 0$; cosa que demuestra el teorema.

CLAS. La condición de que $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ tengan que ser libres es clásicamente superflua.

IN. Esa es la razón por la que les he llamado la atención sobre este teorema; y voy a mostrar, valiéndome de un contraejemplo, que no hay manera de demostrarlo para vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ arbitrarios.

Tomemos para C el campo de los reales, y sean $n = 3$, $r = 2$, $\mathbf{a}_1 = (0, 0, 1)$ y $\mathbf{a}_2 = (a, b, 1)$ siendo a y b números reales tales que no se sepa, para a ni para b, si son 0, así como tampoco se sepa nada acerca del valor a/b (véase 4.2.3). Entonces, de ninguno de los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0) ni (0, 0, 1) podremos afirmar que es libre con respecto a $\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$.

4.3.3. *Los sistemas de rango desconocido*

Si se desconoce cuál es el rango de un sistema de ecuaciones, en general no se podrá encontrar ninguna solución; sin embargo, en algunos casos podremos llegar a un resultado negativo. Como ejemplo, vamos a desmotrar el

Teorema 1. Si todo determinante de n filas formado por la matriz, A, de las ecuaciones

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

es 0, es imposible que estas ecuaciones no tengan ninguna solución $\# \mathbf{0}$.

Demostración. Supongamos que no pudiese haber ninguna solución $\# \mathbf{0}$; tenemos que deducir una contradicción de esta suposición.

El rango de A no es n; si fuese $n - 1$, habría una solución $\# \mathbf{0}$; de ello se sigue que en A no hay ningún determinante de $(n - 1)$ filas que pueda estar $\# 0$, luego todos serán 0; si el rango fuese $n - 2$, podríamos deducir una contradicción siguiendo el mismo método; así pues, tras haber recorrido n pasos encontraremos que todos los coeficientes serán 0. Ahora bien, en tal caso no cabe duda de que habrá una solución $\# \mathbf{0}$; y ésta será la contradicción buscada.

V. LAS ESPECIES PUNTUALES PLANAS

5.1. Nociones generales

Vamos a desarrollar la teoría de las especies puntuales planas [L.E.J. Brouwer 1919A]; y es posible desarrollar una teoría análoga para un número cualquiera, n, de dimensiones, teoría que para $n = 1$ es idéntica a la de las especies de números reales. Aun cuando tal vez resulte algo tedioso dar las definiciones de todos los conceptos fundamentales, incluidos los que son idénticos a los obtenidos con las definiciones corrientes, es necesario hacerlo así, ya que en la bibliografía se encuentran, para casi todas estas nociones, diversas definiciones que clásicamente son equivalentes entre sí, pero no intuicionísticamente.

5.1.1. *Los generadores puntuales y los puntos*

Definición 1. Un *generador puntual* del plano (abreviadamente, *gp*), ξ, es un par ordenado de generadores de número real, (ξ_1, ξ_2).

Definición 2. Un *punto* del plano, x, es un par ordenado de números reales, (x_1, x_2).

Dejo al lector la tarea de dar las definiciones de coincidencia entre dos generadores puntuales, entre dos puntos y entre un generador puntual y un punto.

Teorema 1. Todo generador puntual determina un punto, y sólo uno, con el que coincide.

Definición 3. Un *generador puntual canónico* es un par ordenado de generadores de número canónicos.

En virtud de la demostración de 3.3.3, Teor. 1, todo punto coincide con un gp canónico.

5.1.2. *Las especies y los despliegues*

Definición 1. Una *especie de gp* (o una *especie puntual*) es una especie tal que todos y cada uno de sus miembros sean ggpp (o puntos).

Definición 2. Un *despliegue* de *gp* es un despliegue tal que todos y cada uno de sus elementos sean ggpp; y un despliegue de gp

es *canónico* si todos sus elementos son ggpp canónicos. [Y análogamente para despliegues puntuales canónicos. (T.)]

Definición 3. Dos especies de gp *coinciden* si todo miembro de cualquiera de ellas coincide con algún miembro del otro.

Es fácil dar definiciones análogas para la relación de coincidencia entre A y B en los casos de que sean, tanto A como B, especies de gp, especies puntuales o despliegues de gp.

Teorema 1. Toda especie de gp, y lo mismo todo despliegue de gp, determina una especie puntual, y una sola, con el que coincide.

Definición 4. Dos especies de gp son *geométricamente congruentes* si ninguna de ellas contiene un miembro que no pueda coincidir con uno de la otra.

También en este caso, como sucedía con la Def. 3, es preciso dar otras definiciones análogas a ésta.

5.1.3. *La distancia; topología*

Definición 1. La *distancia*, $|x-y|$, de dos puntos, $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, es máx $(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|)$.

Observación. Podríamos asimismo haber desarrollado la teoría tomando

$$\sqrt{\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\}}$$

como distancia entre x e y; hemos elegido la definición dada arriba con vistas a la sencillez de las fórmulas a obtener.

Valiéndose de este concepto de distancia es posible introducir del modo usual los conceptos de entorno en ϵ y de entorno de un punto, p.

Definición 2. Los puntos x e y están separados entre sí (que se abrevia con $x \# y$) si $x_1 \# y_1$ o $x_2 \# y_2$.

Teorema 1.

(I) Si $p \# q$, se tiene $q \# p$.
(II) Si $p \# q$ es imposible, p coincide con q.
(III) Si p coincide con q, es imposible que $p \# q$.
(IV) Si $p \# q$ y q coincide con r, se tiene $p \# r$.
(V) Si $p \# q$, para todo punto, r, se tiene $p \# r$ o $q \# r$.

Las demostraciones correspondientes son fáciles cuando se vale uno de las propiedades de la relación # entre números reales (2.2.3).

Es posible formular con facilidad unas definiciones análogas para la relación de separación entre dos ggpp y la correspondiente a un punto y un gp.

Definición 3. El punto p es un *punto de clausura* de la especie puntual Q si para todo n puede encontrarse un punto de Q, q_n, tal que $|p-q_n| < 2^{-n}$.

Definición 4. El punto p es un *punto límite* de la especie puntual Q si para todo n podemos encontrar dos puntos de Q, q_n y r_n, tales que $q_n \# r_n$, $|p-q_n| < 2^{-n}$ y $|p-r_n| < 2^{-n}$.

CLAS. ¿Es verdad que todo punto de clausura de Q o bien es un punto de Q o un punto límite de Q?

IN. El siguiente ejemplo hace ver que tal disyunción no tiene por qué ser válida. Definamos como sigue la sucesión $\{a_n\}$: si entre los primeros n dígitos de π no aparece ninguna secuencia 0123456789, será $a_n = 2^{-n}$, y si aparece alguna, será $a_n = 0$. Supongamos que E es la especie de los componentes de la sucesión $\{a_n\}$; entonces, 0 es un punto de clausura de E, pero no se sabe si es un punto de E o un punto límite de E.

Definición 5. La *clausura*, $\overline{Q}$, de una especie de puntos, Q, es la especie de los puntos de clausura de Q.

Definición 6. La *especie derivada* de una especie puntual, Q, es la especie de los puntos límite de Q.

Definición 7. Una especie puntual está *clausurada* [closed] si coincide con su clausura.

Teorema 2. La clausura y la especie derivada de una especie puntual están clausuradas.

Las demostraciones correspondientes son muy sencillas.

Teorema 3. Todo punto límite de la clausura de Q pertenece a la especie derivada de Q.

Demostración. Sea p un punto límite de $\overline{Q}$; entonces, para todo n podemos encontrar unos puntos q_n y r_n de $\overline{Q}$ tales que $q \# r_n$, $|p-q_n| < 2^{-n-1}$ y $|p-r_n| < 2^{-n-1}$; y además, podemos encontrar un m tal que $|q_n-r_n| < 2^{-m}$, siendo $m > n$, así como unos puntos q'_n y r'_n de Q tales que $|q'_n-q_n| < 2^{-m-2}$ y $|r'_n-r_n| < 2^{-m-2}$. Luego $|q'_n-r'_n| < 2^{-m-1}$, por lo cual $q'_n \# r'_n$, $|p-q'_n| < 2^{-n}$ y $|p-r'_n| < 2^{-n}$; cosa que demuestra que p es un punto límite de Q.

5.1.4. *Especies abiertas, regiones y complementos de región*

Pueden definirse las especies puntuales abiertas diciendo que son las especies puntuales que sólo tienen puntos interiores; por consiguiente, el complemento de una especie puntual abierta no es necesariamente abierta: si, en una dimensión, tomamos como especie puntual clausurada el punto 0, su complemento es el género de los puntos p tales que $p \neq 0$; pero los puntos para los que $p \neq 0$ forman una especie abierta. Sin embargo, este concepto de especie abierta incluye casos patológicos del tipo del siguiente: hagamos que, si la constante de Euler es racional, E denote el cuadrado con $|p - x| < 1$, y si no lo es, E denote el cuadrado con $|q - x| < \frac{1}{2}$, siendo p y q puntos distintos. Con objeto de evitar semejantes casos, reemplazamos la noción de especie abierta por otra más constructiva, la de *región* [L.E.J. Brouwer 1918, p. 8; 1919A, p. 20], que es muy sencilla, aunque para formular de modo preciso su definición lo más cómodo es hacerlo tras ciertos preparativos.

En lo que sigue, denotaremos con "E" o bien todo el plano, o un rectángulo de vértices racionales y de lados paralelos a los ejes de coordenadas; y en el caso de que sea un rectángulo, sólo se tendrán en cuenta puntos de E que correspondan al supuesto de que E sea una especie puntual clausurada (incluso cuando no se mencione esta restricción). Admitiremos que E se habrá elegido de una vez y para siempre, permaneciendo el mismo en todo este capítulo.

Definición 1. Un *conjunto elemental de rectángulos* es un conjunto finito de rectángulos de vértices racionales y de lados paralelos a los ejes de coordenadas; no se admiten entre ellos los rectángulos que hayan degenerado en segmentos. Las letras V, W, X, Y y Z denotarán siempre conjuntos de esta clase.

Definición 2. El *dominio elemental racional* $R(V)$ es la especie de los puntos racionales que sean interiores a (o se encuentren sobre) la frontera de al menos uno de los rectángulos de V. El *dominio elemental racional exterior* $R^*(V)$ es la especie de los puntos racionales que no sean interiores a $R(V)$ —tomándose "interior" con respecto al género de los puntos racionales.

Es claro que se quiere decir cuando se habla de que V sea interior a W: como sólo entran en juego puntos racionales, no aparecen dificultades intuicionistas.

Definición 3. El dominio elemental αV es lo mismo que $\overline{R(V)}$; y el dominio elemental exterior $\alpha^*(V)$ es lo mismo que $\overline{R^*(V)}$.

Teorema 1. $\alpha^* V = \overline{E - \alpha V}$.

Demostración. (I) Si $p \in \alpha^* V$, será p el punto límite de una sucesión de puntos racionales de $E - \alpha V$, de modo que $p \in \overline{E - \alpha V}$.

(II) Si $p \in \overline{E - \alpha V}$, podemos encontrar para todo n un punto, p_n, de $E - \alpha V$ tal que $|p - p_n| < 2^{-n-1}$, así como también un punto racional, q_n, tal que $|p_n - q_n| < 2^{-n-2}$. Sabemos que p_n está contenido en el cuadrado con $|q - x| < 2^{-n-2}$, y llamemos δ a dicho cuadrado; si δ estuviese contenido en V, de ello se seguiría que $p_n \in \alpha V$, lo cual es falso; luego parte de δ se encuentra fuera de V (adviértase en esta parte de la demostración que sólo aparecen puntos racionales). Sea r_n un punto racional de δ fuera de V; entonces se tendrán $r_n \in R^*(V)$ y $|p_n - r_n| < 2^{-n-1}$, por lo cual $|p - r_n| < 2^{-n}$; y la sucesión $\{r_n\}$ hace ver que $p \in \alpha^* V$.

Observación. Si E es un rectángulo, $\alpha^* V = \alpha W$, siendo V y W tales que llenarán E sin tener puntos interiores en común; diremos entonces que V y W *cubren simplemente* E. En los casos en que no sea de temer ninguna ambigüedad, omitiremos con frecuencia la α y denotaremos con V el dominio elemental αV; sin embargo, son necesarias en esto ciertas precauciones, como muestra el ejemplo siguiente. Hagamos que V consista en el cuadrado de vértices opuestos $(0, 0) - (1, 1)$, y W en el cuadrado $(0, 1) - (1, 2)$, así como que X sea el conjunto de estos dos cuadrados; entonces, αX no es lo mismo que $\alpha V \cup \alpha W$, ya que, en el caso de un punto, (p_1, p_2), con $0 < p_2 < 1$, pero a cuyo respecto no sepamos si $p_1 \not> 1$ o si $p_1 \not< 1$, dicho punto pertenecerá a αX, pero no podremos decir que pertenece a $\alpha V \cup \alpha W$.

Este ejemplo hace ver al mismo tiempo que la fórmula $\overline{Q \cup R} = \overline{Q} \cup \overline{R}$ no se cumple; en cambio, $\overline{Q \cup R} \subseteq \overline{Q} \cup \overline{R}$ es siempre verdadera.

Definición 4. Una *región* es la unión de una sucesión, $\{V_n\}$, de dominios elementales tal que V_n se encuentre en el interior de V_{n+1} para todo n. (Si E es un rectángulo y si hay una parte, λ, de la frontera de V_n que cae en la frontera de E está permitido que λ pertenezca a la frontera de V_{n+1}.)

Toda región es una especie abierta; y el complemento de una región cualquiera es una especie clausurada. Para muchos propósitos, el concepto de complemento de región puede reemplazar al de especie clausurada.

Observación sobre la notación. Vamos a emplear las letras A, B y C con o sin subíndices, para regiones, V y W (y, en ocasiones, X, Y y Z) para conjuntos elementales de rectángulos o para dominios elementales, M y N para complementos de región, y Q y R para especies puntuales no especificadas, así pues, en el caso de emplearse la letra A se dará por supuesto que el lector sabe que designa una región. En cuanto a $A = \{V_n\}$, quiere decir que la sucesión $\{V_n\}$ satisface la condición de la Def. 4 y que $A = \bigcup_n V_n$.

Teorema 2. Si $A = \{V_n\}$, se tiene

$$E - A = \bigcap_{m=1}^{\infty} (E - V_m) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{(E - V_m)} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \alpha^* V_m .$$

Demostración. (I) Si $p \in E - A$, se tiene $p \notin V_m$ para todo m, luego

$$p \in \bigcap_{m=1}^{\infty} (E - V_m) \text{ , por lo cual } p \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{(E - V_m)} .$$

(II) Supongamos ahora que $p \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \alpha^* V_m$. Para un valor fijo de m, que llamaremos n, se tendrá $p \in \alpha^* V_{n+1}$. Sea d la mínima distancia entre las fronteras de V_n y V_{n+1} (separadas de cualesquiera partes de la frontera de E); podemos encontrar un punto racional, q fuera de V_{n+1}, tal que $|p - q| < \frac{1}{2}d$; luego para todo punto racional, r, de V_n tendremos $|p - r| > \frac{1}{2}d$; de donde $p \notin V_n$; pero como n es arbitrario, p no pertenece a ningun V_n, por lo cual $p \in E - A$.

Este teorema hace ver que, por más que su definición fuese negativa, es posible considerar constructivo el concepto de complemento de región.

Teorema 3. Si es imposible que p no pertenezca a $E - A$, pertenecerá a él (o sea, a $E - A$).

Demostración. Se sigue inmediatamente del hecho de que $E - A$ se haya definido mediante una negación.

LET. ¿Qué extraña lógica está usted aplicando ahora?

IN. En realidad, no aplico la lógica: no podría hacerlo, porque aún no la he desarrollado; pero es cierto que cabe llamar lógico al arumento que acabo de emplear, ya que se refiere a la estructura de la proposición. Voy a exponerlo más pormenorizadamente.

Vamos a utilizar "ϱ" como abreviatura de "$p \in A$"; entonces, la negación "$\neg\, \varrho$" es "$p \in (E, - A)$", y el teorema que acabamos de ver dice que $\neg\neg\neg\, \varrho$ implica $\neg\, \varrho$. Esto es evidente, ya que, suponiendo que $\neg\neg\neg\, \varrho$ esté dado, la suposición de que ϱ sea verdadera conduce a $\neg\neg\, \varrho$, que contradice a $\neg\neg\neg\, \varrho$. (Confróntese 7.1.2, (5).)

5.1.5. *La unión y la intersección*

Teorema 1. La unión de una sucesión finita o infinita de regiones es una región [L.E.J. Brouwer 1919A, p. 22].

Demostración. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de regiones; $A_n = \{V_{nk}\}$.

Hagamos $W_r = \bigcup_{m=1}^{r} V_{mr}$; entonces, la región B definida por

$$\{W_r\} \text{ , es } \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m .$$

Teorema 2. La intersección de dos regiones, $A = \{V_n\}$ y $B = \{W_n\}$, es una región, con tal de que, para cierto valor de n, V_n y W_n, tengan un rectángulo en común.

Demostración. Sea X el rectángulo incluido en V_n y en W_n, y hagamos $V_{n+p} \cap W_{n+p} = Y_p$ para todo p; entonces, la sucesión $\{Y_p\}$ define una región, C, que coincide con $A \cap B$.

Teorema 3. La intersección de una sucesión finita o infinita de complementos de región es un complemento de región; explícitamente:

$$\bigcap_n (E - A_n) = E - \bigcup_n A_n .$$

Demostración. "$x \in \bigcap_n (E - A_n)$" significa: "cualquiera que sea n, x no puede pertenecer a A_n".

"$x \in (E - \bigcup_n A_n)$" significa: "no hay ningún n para el cual x pertenezca a A_n". Vemos que ambos significados son el mismo.

La unión de los correspondientes complementos de dos regiones no siempre es un complemento de región: ni siquiera es necesario que esté clausurado (como puede verse por el ejemplo que sigue a 5.1.4, Teor. 1: los dominios elementales V y W que allí definíamos son complemente de región; y el punto p en que nos fijábamos es un punto de clausura de $V \cup W$). De igual manera que, en el ejemplo que acabo de citar, el dominio elemental X se formaba a partir de V y W, podemos asociar un complemento de región a cualquier par (o conjunto finito) de complementos de región. La definición es como sigue:

Definición. Si $M = \bigcap_n \alpha^* V_n$ y $N = \bigcap_n \alpha^* W_n$, se tiene

$$M \overset{*}{\cup} N = \bigcap_n \alpha^* (V_n \cap W_n)$$

$M \overset{*}{\cup} N$ es un complemento de región, con tal de que, para algún valor de n, $V_n \cap W_n$ contenga un cuadrado.

Teorema 4. Si A y B son regiones tales que $A \cap B$ sea una región (Teor. 2), se tendrá $(E - A) \overset{*}{\cup} (E - B) = E - (A \cap B)$.

Demostración. No ofrece dificultad, teniendo en cuenta las definiciones.

5.2. Las especies puntuales situadas

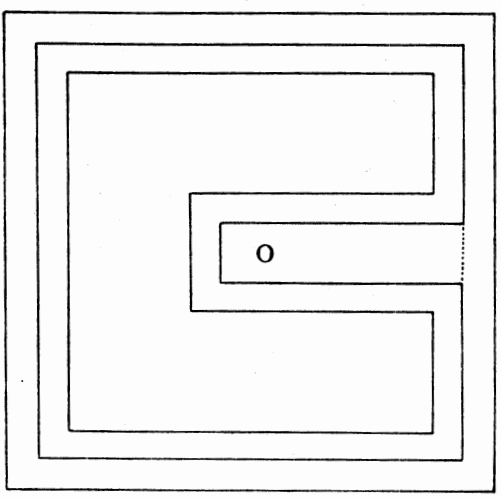
5.2.1. *Las especies puntuales situadas y los abanicos puntuales.*

Definición 1. La *distancia* del punto p a la especie puntual Q, que se escribe $\varrho(p, Q)$, es la máxima cota inferior de las distancias de p a los puntos de Q; por consiguiente, $\varrho(p, Q)$ satisface las siguientes condiciones:

(i) para todo punto q de Q, $|p-q| \not< \varrho$.
(ii) para todo número natural, n, puede encontrarse un punto de Q, q_n, tal que $|p-q_n| < \varrho + 2^{-n}$.

Definición 2. Una especie puntual, Q, está situada [L.E.J. Brouwer 1919A, p. 13], si para todo punto, p, puede calcularse $\varrho(p, Q)$.

Observación. Es patente que $\rho(p, Q)$ es una función continua de p; de ahí que Q esté situada si puede calcularse la distancia de todo punto racional a este especie puntual.



Ejemplo. Sea E el cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$, y supongamos que A es la región definida por la sucesión, $\{V_n\}$, que se obtiene como sigue:

Si en los primeros n dígitos de π no aparece ninguna secuencia

0123456789, V_n es un conjunto de tres rectángulos, cuyos vértices opuestos serán, respectivamente,

$$(-1+2^{-n}, -1+2^{-n}) \quad \text{y} \quad (1-2^{-n}, -2^{-n}),$$
$$(-1+2^{-n}, -2^{-n}) \quad \text{y} \quad (-2^{-n}, +2^{-n}),$$
$$(-1+2^{-n}, +2^{-n}) \quad \text{y} \quad (1-2^{-n}, 1-2^{-n})$$

y si en los n primeros dígitos de k se presenta alguna secuencia 0123456789, V_n es el cuadrado de vértices $\pm (1 - 2^{-n})$.

Sea ahora p un punto racional cualquiera. O bien $p \in E$, con lo cual $\varrho(p, A) = 0$, o p se encuentra fuera de E; luego $\varrho(p, A) = \varrho(p, E)$.

Por consiguiente, A está situada. Sin embargo, $M = E - A$ no lo está, dado que, siendo O el punto (0, 0), se tiene $\varrho(O, M) = 0$ si no aparece en π ninguna secuencia 0123456789, pero $\varrho(O, M) = 1$ si aparece tal secuencia.

Teorema 1. Toda especie puntual situada, clausurada y acotada coincide con un despliegue de gp finitario y canónico (o sea, con un abanico de gp) [L.E.J. Brouwer 1919A, p. 14].

Demostración. Sea Q una especie puntual situada, clausurada y acotada. Por razones de comodidad, llamaremos *punto reticular* n-ésimo a un punto, $(a \cdot 2^{-n}, b \cdot 2^{-n})$, en el que a y b sean enteros. Vamos a dividir los puntos reticulares n-ésimos, siendo sucesivamente $n = 1, 2, \ldots$, en *admisibles* e *inadmisibles*, de tal manera que para cada punto *reticular* n-ésimo que sea admisible, n-ésimo p, tengamos $\varrho(p, Q) < {}^5/_8 \cdot 2^{-n}$ y para cada punto reticular n-ésimo que sea inadmisible, q, tengamos $\varrho(q, Q) > 2^{-n-1}$; cosa que puede hacerse en vista de 2.2.3, Teor. 4.

Ante todo, hagamos ver que, dado $q \in Q$, podemos encontrar un punto reticular n-ésimo admisible, p, tal que $|p - q| < 5/8 \cdot 2^{-n}$. No cabe duda de que podemos hallar un punto reticular n-ésimo, p_1, tal que $|p_1 - q| < 5/8 \cdot 2^{-n}$, y si p_1 queda clasificado como admisible, ya hemos terminado; en caso de que no sea así, será $|p_1 - q| > 2^{-n-1}$, y podremos encontrar un número racional, $\epsilon > 0$ tal que $|p_1 - q| > (\frac{1}{2} + \epsilon) \cdot 2^{-n}$; hagamos ahora que p_2 sea un punto reticular n-ésimo tal que $|p_2 - q| < (\frac{1}{2} + \epsilon) \cdot 2^{-n} < |p_1 - q| < 5/8 \cdot 2^{-n}$; pues bien, si p_2 es admisible, ya hemos terminado y si no lo es, repetimos esta misma construcción con p_2 en lugar de p_1; de este modo obtenemos una sucesión de puntos reticulares n-ésimos distintos, p_i, tales que $|p_i - q| < 5/8 \cdot 2^{-n}$ para todo i. Pero semejante sucesión no puede contener más de cuatro puntos, ya que entre cinco puntos reticulares n-ésimos hay siempre dos cuya distancia es como mínimo 2^{-n+1}; por lo tanto, tras un máximo de cuatro pasos encontraremos un punto reticular n-ésimo admisible, p, tal que $|p - q| < 5/8 \cdot 2^{-n}$.

Si p es un punto reticular n-ésimo admisible cualquiera, podrá hallarse un punto de Q, q, tal que $|p - q| \leqslant 5/8 \cdot 2^{-n}$, y luego un punto reticular $(n+1)$-ésimo admisible, r, tal que $|q - r| < 5/8 \cdot 2^{-n-1}$; con lo cual $|p - r| < 2^{-n}$. Fijémonos ahora en el despliegue, D, de todos los generadores canónicos de punto $\{p_n\}$, siendo p_n un punto reticular n-ésimo admisible; tras haber elegido p_n, de las elecciones posibles para p_{n+1} serán admisibles, como mínimo, una, y como máximo nueve; luego D será un abanico de gp. Quiero ahora demostrar que D coincide con Q.

(I) Si $p \in Q$, un gp canónico de p pertenece a D.

(II) Sea d un punto que coincida con un gp de D, d_0. Tendremos $d_0 = p_n$, siendo p_n un punto reticular n-ésimo admisible; además, $|d_0 - p_n| \not> 2^{-n}$, y podremos encontrar un punto de Q, q_n, tal que $|p_n - q_n| < 2^{-n}$; por consiguiente, $|d_0 - q_n| < 2^{-n+1}$. Como todo q_n está en Q, d_0 es un punto de clausura de Q, y como Q está clausurada, $d_0 \in Q$.

Corolario. Sean q y r unos puntos de la especie puntual situada y clausurada Q tales que $|q - r| < 2^{-n-4}$; podremos encontrar un punto reticular n-ésimo admisible, p_n, tal que $|q - p_n| < 9/16 \cdot 2^{-n}$; luego $|r - p_n| \not> |r - q| + |q - p_n| < 2^{-n-4} + 9/16 \cdot 2^{-n} = 5/8 \cdot 2^{-n}$. Así hemos demostrado el lema siguiente:

Si q y r son puntos de una especie puntual situada y clausurada, Q, tales que $|q - r| < 2^{-n-4}$, el abanico de gp, D, que coincide con Q contiene dos elementos que coinciden respectivamente con q y con r y cuyos n primeros componentes, $p_1, \ldots, p_n$, son los mismos.

Teorema 2. La clausura de todo abanico puntual canónico, D, coincide con un complemento de región situado.

Demostración. Sea H el conjunto de los n-ésimos componentes de los elementos de D; H es, entonces, un conjunto finito de puntos reticulares n-ésimos. Tomando como centro todos y cada uno de los puntos de H, descríbase el cuadrado de lado $3 \cdot 2^{-n}$, y sea V_n el conjunto de tales cuadrados; hagamos ahora $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ con lo que M será un complemento de región. No cabe duda de que D se encuentra geométricamente incluído dentro de M; y como M está clausurado, también $\overline{D}$ está geométricamente contenido dentro de M; voy a demostrar que, en forma conversa, M está incluído geométricamente en $\overline{D}$.

Sea q un punto de M; entonces $q \in V_n$, luego podremos encontrar un punto, p_n, de H tal que $|q - p_n| < 2^{-n+1}$; p_n, pues, es un componente de al menos un gp de D: de d_n, digamos; por lo cual $|d_n - p_n| < 2^{-n}$. De esta manera hallamos, para todo n, un gp, d_n, de D tal que $|q - d_n| \; 2^{-n+2}$; luego q es un punto de clausura de D.

Todavía es preciso demostrar que M está situado. Sea p un punto

cualquiera del plano, y hagamos $\varrho(p, V_n) = \varrho_n$; por la construcción de V_n y de V_{n+1} es evidente que $\varrho_n \nrightarrow \varrho_{n+1} \nrightarrow \varrho_n + 5/4 \cdot 2^{-n}$; luego existe el lím $\varrho_n = \varrho_0$ y $\varrho_0 - \varrho_n \nrightarrow 5/2 \cdot 2^{-n}$.

Quiero demostrar que $\varrho(p, M) = \varrho_0$, es decir, que

(I) si $q \in M$, se tiene $|p-q| \not< \varrho_0$;
(II) para todo n puede encontrarse un punto, q_n, de M tal que

$$|p-q_n| < \varrho_0 + 2^{-n}.$$

Demostración de (I). $q \in V_n$, luego $|q - p| \not< \varrho_n \not< \varrho_0 + 5/4 \cdot 2^{-n}$ para todo n; esto es, $|q - p| \not< \varrho_0$.

Demostración de (II). Podemos encontrar sucesivamente un cuadrado, a, de V_n tal que $\varrho(p, a) < \varrho_n + 2^{-n}$ y un punto, r, de a tal que $|p - r| < \varrho_n + 2 \cdot 2^{-n}$; luego $|p - r| < \varrho_0 + 9/2 \cdot 2^{-n}$.

Corolario 1. De los dos teoremas precedentes se sigue que toda especie puntual situada, clausurada y acotada coincide con un complemento de región.

Teorema 3. Toda función de valores reales que esté definida por doquier en una especie puntual situada, clausurada y acotada es uniformemente continua en dicha especie.

Teorema 4. Toda función de valores reales que esté definida por doquier en una especie puntual situada, clausurada y acotada posee una m.c.i. y una m. c. s. en dicha especie.

Teorema 5. Si una función de valores reales está definida y es positiva por doquier en una especie puntual situada, clausurada y acotada, su m.c.i. es positiva.

Las demostraciones de estos teoremas son exactamente análogas a las dadas en 3.4.3.

5.2.2. *Forma intuicionista del teorema de Heine-Borel*

Teorema. Sea Q una especie puntual situada, clausurada y acotada. Si a todo punto, p, de Q se le asocia un entorno, $U(p)$, en E, podremos encontrar un conjunto finito, $U(q_1)$, ..., $U(q_m)$ de estos entornos tal que Q esté contenida en $\bigcup_{k=1}^{m} U(q_k)$.

Demostración. Por definición de entorno, $U(p)$ incluye un cuadrado con $|p - x| < 2^{-h}$, siendo h un número natural asociado a p. Hagamos que D sea un abanico puntual canónico que coincida con Q; y si el punto p de Q coincide con el gp $p' = \{p_n'\}$ de D, h estará asociado a p'. Por el teorema del abanico podemos encontrar un valor máximo de h, h_0, tal que, para todo p, $U(p)$ contenga el cuadrado con $|p - x| < 2^{-h_0}$; los puntos reticulares $(h_0 + 1)$-ési-

mos que aparezcan como componentes de los elementos de D pueden disponerse en una sucesión finita, $p'_{h_0} + 1, i$ (siempre de $i + 1, \ldots, m_0$), y para cada uno de estos valores de i determinaremos un elemento fijo de D, al que llamaremos q'_i, digamos, en el que aparezca $P_{h_0+1,\,i}$. Supongamos ahora que q_i sea el punto de Q que coincida con q_i; entonces, $|q_i - p'_{h_0} + 1, i| < 5/8 \cdot 2^{-h_0 - 1}$.

Un punto arbitrario, r, de Q coincide con un elemento, $r = \{r'_n\}$, de D; $r'_{h_0+1} = p'_{h_0+1,\,i}$ para cierto i de modo que $|r - p'_{h_0+1,\,i}| < 5/8 \cdot 2^{-h_0 - 1}$. De esto se sigue que $|q - r| < 5/8 \cdot 2^{-h_0}$, o sea, que $r \in U(qi)$; lo cual quiere decir que $U(q_1) \cup \ldots \cup U(q_{m_0})$ contiene a Q.

Observación. L.E.J. Brouwer [1926C, p. 867] demostró este teorema de una forma más general (para lo que él llama especies compacto-situadas).

VI. MEDIDA E INTEGRACION

En este capítulo, E es el cuadrado unidad, con $|x - 0| \not> \frac{1}{2}$.

6.1. Las regiones medibles y los complementos de región.

6.1.1. *Las regiones medibles*

Definición. La medida (que denotaremos con mV) de un dominio elemental, V, es su área en el sentido corriente. Si una región, A, está definida por la sucesión, $\{V_n\}$, de dominios elementales y si $\lim_{n\to\infty} mV_n$ existe, A es *medible* y su *medida* es

$$mA = \lim_{n\to\infty} mV_n \quad \text{[L.E.J. Brouwer 1919A, p. 26]}$$

CLAS. De acuerdo con esa definición, ni siquiera es medible toda región acotada.

IN. Lo cual es una consecuencia necesaria del hecho de que una sucesión monótona acotada de números reales no haya de ser necesariamente convergente. La demostración del teorema que sigue es menos sencilla de lo que podría esperarse.

Teorema 1. Si A y B son regiones medibles, y si $A \supseteq B$ se tiene $mA \not< mB$.

La demostración se apoya en el lema siguiente:

Lema 1. Si el dominio elemental W está contenido en la región $A = \{V_n\}$, puede encontrarse un número, m, tal que W quede cubierto por V_m.

Demostración. A todo punto, p, de W le está asociado un número natural, $h(p)$, tal que p pertenezca a $V_{h(p)}$. Dado que W está acotado, clausurado y situado, de 5.2.1, Teor. 1, y del teorema del abanico se sigue que $h(p)$ tiene un máximo, m; luego todo punto de W pertenece a V_m.

Demostración del teorema 1. Sean $A = \{V_n\}$, y $B = \{W_n\}$. Dado k, determinamos primero n de tal modo que $mB - mW_n < 2^{-k}$, y luego (por el lema) m de tal suerte que V_m cubra W_n; de ahí que $mA > mV_m \geqq mW_m > mB - 2^{-k}$; y como esto se cumple para todo k, $mA \not< mB$.

Teorema 2. Si la región A coincide con la región B y si A es medible también B es medible, y $mA = mB$.

Demostración. $A = \{V_n\}$, y $B = \{W_n\}$. Por el lema 1, para todo n tenemos que $mW_n < mA$; por otra parte, si A es medible, dado k podremos encontrar un i tal que $mV_i > mA - 2^{-k}$, y luego un h tal que W_h cubra V_i (valiéndonos del lema); por lo tanto, $mW_h > mA - 2^{-k}$. De aquí que $\lim_{n\to\infty} mW_n = mA$.

Teorema 3. Si A y B son regiones medibles, la región $C = A \cup B$ es medible y $mC \not< mA + mB$.

La demostración se sigue fácilmente de la definición.

Teorema 4. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de regiones medibles tales que el $\lim_{r\to\infty} m \bigcup_{n=1}^{r} A_n = \mu$ exista; entonces, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es una región medible y $mA = \mu$.

Demostración. Hagamos $\bigcup_{n=1}^{r} A_n = B_r$, $\bigcup_{n=1}^{\min. r,s} V_{ns} = W_{rs}$, y $W_{ss} = U_s$; entonces, $B_r = \{W_{rs}\}$, y $A = \{U_s\}$, y además tenemos $mU_s = mW_{ss} < mB_s \not< \mu$.

Determinemos n_1 de tal modo que $\mu - mB_{n1} < 2^{-k-1}$, y $n_2 > n_1$ tal que $mB_{n1} - mW_{n1n2} < 2^{-k-1}$; entonces, $\mu - mU_{n2} < \mu - mW_{n1n2} < 2^{-k}$. De donde se sigue que $\lim_{s\to\infty} mU_s = \mu$, luego $mA = \mu$.

6.1.2. *Los complementos de región medibles*

Definición 1. Si el complemento de región M es el complemento de la región medible A, M es *medible* y su *medida*, mM, es $1 - mA$.

Teorema 1. Si M_1 y M_2 son complementos de región medibles, $mM_1 = m_1$, $mM_2 = m_2$ y $m(M_1 \cap M_2) = m$, se tiene $m_1 + m_2 \not> 1 + m$.

Demostración. Tenemos: $M_1 = E - A_1$, $M_2 = E - A_2$ y $M_1 \cap M_2 = E - (A_1 \cup A_2)$

Teniendo en cuenta 6.1.1, Teor. 3, tendremos sucesivamente:

$$m(A_1 \cup A_2) \not> mA_1 + mA_2$$
$$1 - m \not> 1 - m_1 + 1 - m_2$$
$$m_1 + m_2 \not> 1 + m.$$

Teorema 2. [L.E.J. Brouwer, 1919A, p. 26]. Todo complemento de región medible de medida positiva contiene un complemento de región medible y situado, S, tal que $mS > mM - 2^{-p}$, siendo p un número natural arbitrario.

Demostración. Existe una sucesión, $\{V_n\}$, de dominios elementales tal que $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, y a partir de ella podemos elegir una subsucesión, $\{W_n\}$, tal que $mW_n - mM < 2^{-4n-p}$ para todo n. Ahora vamos a obtener S mediante la construcción que sigue: divídase E en subcuadros de lado 2^{-n}, a los que llamaremos cuadrados $\varkappa_n$; de cada cuadrado W_n eliminaremos su intersección con los cuadrados $\varkappa_1$ cuya intersección con W_1 sea $< 2^{-p-3}$, llamando W'_n a lo que reste; de cada W'_n eliminaremos la intersección con los cuadrados $\varkappa_2$ cuya intersección con W'_2 sea $< 2^{-p-7}$, y así sucesivamente; en general, a partir de $W_n^{(k)'}$ se obtiene $W_n^{(k+1)}$ (siendo $n > k$) eliminando las intersecciones con los cuadrados $\varkappa_{k+1}$ cuya intersección con $W_{k+1}^{(k)}$ sea $< 2^{-p-4k-3}$; entonces,

$$S = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n^{(n)}.$$

y, teniendo en cuenta 5.1.5, Teor. 3, L es un complemento de región.

Por hipótesis, $mW_n - mW_{n+1} < 2^{-4n-p}$; *a fortiori,*

$$mW_n^{(n)} - mW_{n+1}^{(n)} < 2^{-4n-p}.$$

Al pasar de $W_{n+1}^{(n)}$ a $W_{n+1}^{(n+1)}$, el área eliminada es, como máximo, $2^{2n+2} \cdot 2^{-p-4n-3} = 2^{-p-2n-1}$, de modo que $mW_n^{(n)} - mW_{n+1}^{(n+1)} < 2^{-4n-p} + 2^{-p-2n-1} < 2^{-p-2n}$.

De aquí se sigue que existe el lím $mW_n^{(n)}$.

No nos está permitido inferir inmediatamente que lím $mW_n^{(n)} = mS$, ya que $W_{n+1}^{(n+1)}$ no tiene por qué ser estrictamente interior a $W_n^{(n)}$; sin embargo, ampliando ligeramente cada uno de los $W_n^{(n)}$ podemos construir fácilmente una sucesión, $\{U_n\}$, de dominios elementales tales que U_{n+1} sea siempre estrictamente interior a U_n, que $S = \cap\, U_{n(n)}$ y que lím mU_n = lím $mW_n^{(n)}$. Luego S es medible y mS = lím $mW_n^{(n)}$.

Teniendo en cuenta la construcción de $W_n^{(n)}$ vemos que

$$mW_n - mW_n^{(n)} < \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2k+2} \cdot 2^{-p-4k-3} < {}^2/_3 \cdot 2^{-p};$$

y pasando al límite tenemos

$$mM - mS < 2^{-p}.$$

Queda por mostrar que S está situado. Sea $\varkappa'$ uno de los cuadrados $\varkappa_n$ que tenga una intersección positiva con $W_n^{(n)}$; entonces, por la construcción que acabamos de hacer, dicha intersección será $\geqq 2^{-p-4n+1}$; como se tiene $mW_n^{(n)} - mW_{n+1}^{(n)} < 2^{-p-4n}$,

resulta que $m(W_{n+1}^{(n)} \cap \varkappa') > 2^{-p-4n+1} - 2^{-p-4n} = 2^{-p-4n}$. Al pasar de $W_{n+1}^{(n)}$ a $W_{n+1}^{(n+1)}$ eliminamos de $\varkappa'$, como máximo, un área $4 \cdot 2^{-p-4n-3}$, por lo cual $W_{n+1}^{(n+1)}$ tiene una parte en común con $\varkappa'$; por consiguiente, tiene asimismo una parte en común con al menos uno de los cuadrados $\varkappa_{n+1}$ que formen parte de $\varkappa'$; y continuando este proceso encontraremos una sucesión, $\{q_h\}$, en la que todo q_h será un cuadrado $\varkappa_{n+h}$, de modo que, para todo h $W_{n+h}^{(n+h)}$ tendrá una parte en común con q_h. Sea $x^{(h)}$ un punto de $W_{n+h}^{(n+h)} \cap q_h$; la sucesión $\{x^{(h)}\}$ converge hacia un punto, x_0; por otra parte, como $x^{(j)} \in W_{n+h}^{(n+h)}$ para $j \geqq h$, $x_0 \in W_{n+h}^{(n+h)}$, y al cumplirse esto para todo h, $x_0 \in S$. Así pues, todo cuadrado $\varkappa_n$ que tenga una intersección positiva con $W_n^{(n)}$ tendrá al menos un punto en común con S.

Hagamos ahora que H sea el conjunto de cuadrados $\varkappa_n$ que tengan una intersección positiva con $W_n^{(n)}$. Dado que $S \subseteq H_n$, para un punto arbitrario, p, y para todo punto de S, q, tenemos

$$\varrho(p, H_n) \not< |p - q|; \tag{1}$$

además, todo cuadrado de H_n tiene al menos un punto en común con S; en consecuencia, existe un punto de S, q_n, tal que

$$|p - q_n| \not< \varrho(p, H_n) + 2^{-n}, \tag{2}$$

y, en virtud de (1) y (2),

$$\varrho(p, H_{n+k}) \not< |p - q_n| \not< \varrho(p, H_n) + 2^{-n}. \tag{3}$$

Por otra parte, $H_{n+1} \subseteq H_n$, luego

$$\varrho(p, H_{n+k}) \not> \varrho(p, H_n), \tag{4}$$

de donde se sigue que el $\lim_{n \to \infty} \varrho(p, H_n) = d$ existe. Además, en virtud de (1), para todo punto de S, q,

$$|p - q| \not> d;$$

en virtud de (4), $\varrho(p, H_n) \not< d$, y debido a (2),

$$|p - q_n| \not< d + 2^{-n}.$$

Vemos, pues, que $d = \varrho(p, L)$ y que S está situado.

Corolario. De la demostración que acabamos de presentar se sigue que todo complemento de región acotado y de medida positiva contiene por lo menos un punto.

Teorema 3. Si el complemento de región medible M está contenido en el dominio elemental V, se tiene $mM \not< mV$.

Demostración. $M = \cap W_n$. Supongamos que $mM > mV$. Podremos encontrar un q tal que $mM > mV + 2^{-q}$; luego para todo n, $mW_n > mV + 2^{-q}$. Sea ahora U_n la parte de W_n situada fuera de V; tendremos $mU_n > 2^{-q}$; si recortamos de todo U_n una pequeña tira a lo largo de la frontera de V, obtendremos lo que vamos a llamar T_n; esto podemos hacerlo de tal forma que T_{n+1} sea interior a T_n y que $mT_n > 2^{-q}$ para todo n. Ahora haremos $\cap T_n = N$; resulta que N es un completo de región medible y que $mN \not< 2^{-q}$; de ahí que, en vista del último corolario, N contenga por lo menos un punto, p. Es evidente que p que puede pertenecer a V, de modo que $mM > mV$ ha llevado a una contradicción.

6.1.3. *Las especies puntuales despreciables y las casi llenas*

Definición 1. Llamamos *despreciable* a cualquier especie puntual que pueda quedar encerrada en una región medible de medida arbitrariamente pequeña.

Definición 2. Llamamos *casi llena* a cualquier especie puntual que contenga para todo n, un complemento de región cuya medida sea mayor que $1 - 2^{-n}$. De toda propiedad que se cumpla en una especie casi llena diremos que se cumple *casi por doquier.*

El complemento de una especie puntual despreciable, Q, es casi lleno, ya que $Q \subseteq A$ implica $E - A \subseteq E - Q$. La conversa no es cierta, puesto que a partir de $E - A \subseteq R$ se sigue que $E - R \subseteq E - (E - A)$, pero esta última especie no coincide necesariamente con A, y no estamos seguros de que sea una región.

Teorema 1. El encuentro o intersección de dos especies casi llenas es una especie casi llena.

Demostración. Sean Q y R especies casi llenas, así como M y N complementos de región de medida $> 1 - 2^{-n}$ que estén respectivamente contenidos en Q y R; entonces, $M \cap N \subseteq Q \cap R$. Hagamos $m(M \cap N)' = m$; por 6.1.2, Teor. 1, $1 - 2^{-n} + 1 - 2^{-n} < 1 + m$, y $m > 1 - 2^{-n+1}$.

Observaciones. Si V es un dominio elemental, también es un complemento de región, y su interior es una región con la misma medida (que V). Además, la frontera de V es un complemento de región de medida 0; y es posible encerrarlo en una región medible, A, de medida $< 2^{-n}$, región que cabe elegir de tal modo que, para cierto número, s, todo punto a una distancia de dicha frontera inferior a 2^{-s} pertenezca a A.

Sea W el conjunto elemental de rectángulos que juntamente con V cubra simplemente E; para un punto arbitrario, p, de $E - A$, podemos solventar (valiéndonos de una aproximación inferior a 2^{-s}) la cuestión de si pertenece a V o a W.

LA INTEGRAL DE BROUWER

Voy a desarrollar la teoría de la integración en el caso de funciones que estén definidas en una subespecie, Q, del cuadrado unidad, E. Es posible ampliar tal teoría en varias direcciones, pero la presente introducción no es el lugar apropiado para hacerlo.

6.2. Las funciones medibles acotadas

6.2.1. *Definición de integral*

Definición 1. Una función acotada, $f(x)$, definida en una subespecie, Q, de E, es *medible* [L.E.J. Brouwer 1923, p. 6] si, para todo número natural, n, se cumplen las siguientes condiciones:

(I) está dada una región plana medible, A_n, con $mA < 2^{-n}$;

(II) E está simplemente cubierto por los dominios elementales V_{nH} (siendo $h = -l_n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k_n$);

(III) si $M_n = E - A$, se tienen

a) para $x \in V_{nh} \cap M_n$ y $h \neq 0$,

$$(h - 1)\, 2^{-n-1} \not> f(x) \not> (h + 1)2^{-n-1};$$

b) para $x \in Q \cap V_{n0} \cap M_n$,

$$-2^{-n-1} \not> f(x) \not> 2^{-n-1}$$

Llamaremos *tira aproximadora* n-ésima de $f(x)$ al conjunto de intervalos tridimensionales

$$x \in V_{nh},\ (h - 1)2^{-n-1} \not> z \not> (h + 1)2^{-n-1}$$
(siendo $h = -l_n, \ldots, 0, \ldots, k_n$);

de $f(x)$ diremos que es medible por $\{V_{nh}\}$ y $\{A_n\}$.

Definición 2. Se define la *integral* de la función medible $f(x)$ del siguiente modo:

$$(1) \qquad \int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} 2^{-n-1} \sum_{h=-l_n}^{k_n} h\, m V_{nh}.$$

Observaciones. 1.ª La suposición de que las fronteras de todos los V_{nh} están contenidas en A_n no impone restricción alguna; pues si $mA_n < 2^{-n} - 2^{-r}$, es posible encerrar estas fronteras dentro de una región medible, C_n, de medida inferior a 2^{-r} y substituir luego A_n por $A_n \cup C_n$; cosa que ofrece la ventaja de que para todo punto de $E - (A_n \cup C_n)$ sabremos a qué V_{nh} pertenecerá. Véase la obser-

vación 2.ª para el caso en que se viole la condición (IIIc). 2.ª Si no se cumple la condición (IIIc), podemos forzar su cumplimiento como sigue. Apliquemos ante todo la observación 1.ª; por ello voy a suponer en todo lo que digo a continuación que A_n contendrá las fronteras de los V_{nh}. Supongamos ahora que $mA_n < 2^{-n} - 2^{-r}$, y hagamos $r(l_n + k_n + 1) = s$; por el corolario de 6.1.2, Teor. 2, o bien $V_{nh} \cap M_n$ contiene un punto, o $m(V_{nh} \cap M_n) < 2^{-s}$; en este último caso, encerramos $V_{nh} \cap M_n$ en una región medible, C_{nh}, de medida inferior a 2^{-s} y sustituimos A_n por $A_n \cup C_{nh}$; tras de lo cual añadimos V_{nh} a uno de los demás V_{ni}.

3.ª Podemos también suponer que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo n, pues si hacemos $\overset{\infty}{\underset{k=n}{\cup}} A_k = B_n$ y $W_{nh} = V_{n+1,\,2h-1} \overset{*}{\cup} V_{n+1.2h}$, se tiene que $f(x)$ es también medible por $\{B_n\}$ y $\{W_{nk}\}$, con lo que la sucesión $\{W_{nk}\}$ proporciona la misma integral. (Si es necesario restablecemos la condición (IIIc) del modo indicado en la observación 2.ª).

4.ª. Es a menudo conveniente modificar la cláusula (II) de la Def. 1 del modo que sigue,

(II bis) E está simplemente cubierto por los dominios elementales $V_{nh}^{(p)}$, y todo $V_{nh}^{(p)}$ está contenido en un $V_{n-1,j}^{(q)}$,

y sustituir, en la cláusula (III), $V_{nh} \cap M_n$ por $\underset{p}{\cup} (V_{nh}^{(p)} \cap M_n)$

CLAS. Esa es una definición perfectamente conocida de la integral de Labesgue.

IN. Sí, pero era necesario elegir una definición constructiva entre las posibles clásicamente. Por ejemplo, si $f(x)$ está definida en E y tiene el valor constante a, siendo a un número real para el que no se sepa si $a < \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$ o $a > \frac{1}{2}$, la especie puntual para la que $f(x) < \frac{1}{2}$ no es medible (cosa que ya puedo decir ahora, aunque no haya dado aún una definición general de las especies puntuales medibles); y, desde luego, la misma observación es aplicable a $f(x) = \frac{1}{2}$ y a $f(x) > \frac{1}{2}$.

Una importante diferencia consiste en que el matemático clásico puede siempre suponer que las funciones que utiliza están definidas sobre la totalidad de E sin más que asignarles el valor 0 en todo punto para el que no estén definidas; pero esto no marcha desde un punto de vista intuicionista, ya que para algunos puntos no se sabrá si la función está definida o no. La definición de Brouwer de función medible está formulada de tal suerte que para semejante función sepamos casi por doquier, o bien que está definida, o que, estándolo, es inferior a 2^{-n}, pudiendo elegirse aquí n arbitrariamente.

Llamaremos *dominio* de $f(x)$ a la especie puntual en la que esté definida $f(x)$.

Teorema 1. Para toda función medible existe el límite (1).

Demostración. Sea $f(x)$ medible por $\{V_{nh}\}$ y $\{A_n\}$; y supondremos que las A_n cumplen las condiciones de la observación 1ª.

Sea p cualquier número mayor que n, y hagamos $V_{nh} \cap V_{pk} = W_{hk}$. Cada W_{hk} es o bien un X_{hk} o un Y_{hk}, de la forma que se indica a continuación:

$$W_{hk} = X_{hk} \text{ si } |h2^{-n-1} - k2^{-p-1}| < 2^{-n};$$
$$W_{hk} = Y_{hk} \text{ si } |h2^{-n-1} - k2^{-p-1}| \geqq 2^{-n}.$$

Es patente que

$$(2)\quad 2^{-p-1} \sum_k k\, mV_{pk} - 2^{-n-1} \sum_h h\, mV_{nh} = \sum_{h,k} (k2^{-p-1} - h2^{-n-1})\, mW_{hk}.$$

Teniendo en cuenta la definición dada para $x \in V_{nh} \cap M_n$ (siendo $h \neq 0$),

$$(3)\qquad (h-1)2^{-n-1} \not> f(x) \not> (h+1)2^{-n-1},$$

y la dada para $x \in V_{pk} \cap M_p$ (siendo $k \neq 0$),

$$(4)\qquad (k-1)2^{-p-1} \not> f(x) \not> (k+1)2^{-p-1};$$

en consecuencia, para $x \in W_{hk} \cap M_n \cap M_p$

$$(5)\qquad |h2^{-n-1} - k2^{-p-1}| \not> 2^{-n-1} + 2^{-p-1} < 2^{-n}.$$

Esto se cumple también para $h = 0$, $k \neq 0$ y para $h \neq 0$, $k = 0$; pues, en el primer caso, $V_{pk} \cap M_p \subseteq Q$, de modo que $W_{0k} \cap M_p \cap M_n \subseteq Q$, con lo que (3) es válida en $W_{0k} \cap M_p \cap M_k$. Para $h = k = 0$, (5) es trivial.

Todo punto de $M_n \cap M_p$ pertenece a algún W_{hk}; y, en virtud de (5), éste no puede ser ningún Y_{hk}, luego $M_n \cap M_p \subseteq \cup X_{hk}$.

Ahora bien, por 6.1.2. Teor. 1, $m(M_n \cap M_p) \not< 1 - 2^{-n} - 2^{-p} > 1 - 2^{-n+1}$; luego $m \cup X_{hk} > 1 - 2^{-n+1}$ y $m \cup Y_{hk} < 2^{-n+1}$. Así pues, si $|f(x)| < M$,

$$(6)\qquad \sum_{h,k} |k2^{-p-1} - h2^{-n-1}| mY_{hk} < (2M+2)2^{-n+1};$$

también se tiene:

$$(7)\qquad \sum_{h,k} |k2^{-p-1} - h2^{-n-1}| mX_{hk} < 2^{-n}\, m \cup X_{hk} \not> 2^{-n};$$

y, en virtud de (2),

$$(8)\qquad |2^{-p-1} \sum k\, mV_{pk} - 2^{-n-1} \sum h\, mV_{nh}| < (4M+5)2^{-n}.$$

Aplicando ahora el principio de Cauchy (2.4), se ve que existe el límite que aparece en (1).

Teorema 2. Si la función acotada $f(x)$ es medible por $\{V_{nh}\}$ y $\{A_n\}$ así como por $\{W_{nk}\}$ y $\{B_n\}$, se tiene

$$(9)\qquad \lim_{n\to\infty} 2^{-n-1} \sum h\, mV_{nh} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n-1} \sum k\, mW_{nk}.$$

Demostración. Hagamos $A_n \cup B_n = C_n$, y $E - C_n = M_n$; podemos suponer que C_n contendrá las fronteras de V_{nh} y W_{nk}. Hagamos ahora que sea

$$V_{nh} \cap W_{nk} = X_{hk} \text{ si } |h-k| \leqq 1, \text{ y}$$
$$V_{nh} \cap W_{nk} = Y_{hk} \text{ si } |h-k| > 1.$$

No es posible que un punto de Y_{hk} pertenezca a M_n; luego $M_n \subseteq \cup X_{hk}$; y de ahí (6.1.2, Teor. 3), $mM_n \not> m \cup X_{hk}$, con lo que tenemos sucesivamente: $m \cup X_{hk} \geqq 1 - 2^{-n+1}$; $m \cup Y_{hk} \leqq 2^{-n+1}$;

$$|2^{-n-1} \sum h\, mV_{nh} - 2^{-n-1} \sum k\, mV_{nk}| =$$
$$= 2^{-n-1} |\sum (h-k) mX_{hk} + \sum (h-k) mY_{hk}| \leqq$$
$$\leqq 2^{-n-1} \sum mX_{hk} + (2M + 2^{-n}) \sum mY_{hk} \leqq 2^{-n-1} + 2M \cdot 2^{-n+1} +$$
$$+ 2^{-2n+1} < (8M + 2) 2^{-n-1};$$

de este modo el teorema (9) queda demostrado.

6.2.2. *Las condiciones de la medibilidad*

Teorema 1. Una función acotada que esté definida casi por doquier es medible [B. van Rootselaar 1954, p. 7].

Demostración. Por hipótesis, $f(x)$ está definida en la especie Q, y Q contiene, para todo n, un complemento de región medible, M_n, tal que $mM_n > 1 - 2^{-n-3}$.

En virtud de 6.1.2, Teor. 2, M_n contiene un complemento de región situado y medible, S_n, tal que $mS_n > 1 - 2^{-n-2}$; hagamos $S_n = E - A'_n$. Aplicando 5.2.1, Teor. 3, vemos que $f(x)$ es uniformemente continua en S_n, de modo que para todo punto, x, de S_n está dado un entorno, $U_n(x)$, tal que $|f(x) - f(x')| < 2^{-n-2}$, si es que x' se encuentra en $U_n(x) \cap S_n$. Además, $U_n(x)$ contiene un dominio elemental, $V_n(x)$, en cuyo interior está contenido x. Es posible aplicar a S_n el teorema de Heine-Borel (5.2.2), de modo que hay un número finito de dominios, V_{ni} (siendo $i = 1, \ldots, m$), que cubren S_n. Definimos ahora unos dominios elementales disjuntos, W_{ni}, mediante

$$W_{n1} = V_{n1}, \quad W_{ni} = V_{ni} - \bigcup_{k=1}^{i-1} (V_{ni} \cap W_{nk});$$

entonces, el área total cubierta por W_{ni} es, al menos, $1 - 2^{-n-2}$, y el resto de E puede quedar encerrado en una región medible, A_n, de medida $< 2^{-n-1}$. Encerremos las fronteras de los W_{ni} en una región medible, B_n, con $mB_n < 2^{-n-2}$, y hagamos $C_n = A_n \cup B_n \cup A'_n$, de suerte que sea $mC_n < 2^{-n}$; entonces, $f(x)$ es medible por $\{W_{ni}\}$ y $\{C_n\}$.

En forma conversa, vamos a mostrar que es posible completar toda función medible hasta una función medible definida casi por doquier que tenga la misma integral que aquélla.

Definición 1. $g(x)$ es una *compleción* de $f(x)$ si satisface las siguientes condiciones:

(I) $g(x)$ está definida casi por doquier;
(II) $g(x) = f(x)$ en todo punto en el que $f(x)$ y $g(x)$ estén definidas, y
(III) $f(x)$ está definida en todo punto en el que $g(x) \# 0$.

Teorema 2. Si $f(x)$ es medible por $\{V_{nh}\}$ y $\{A_n\}$, la función $g(x)$ que definimos inmediatamente debajo es una compleción de $f(x)$:

$g_n(x) = h_2{}^{-n-1}$ en $V_{nh} \cap (E - A_n)$; $g(x) = \lim g_n(x)$

Teorema 3. Si $g(x)$ es una compleción de la función medible y acotada $f(x)$, también $g(x)$ es medible, y además

$$\int g(x)dx = \int f(x)dx.$$

Teorema 4. Si existe una compleción de $f(x)$ esta última función es medible.

Las demostraciones de estos teoremas son inmediatas apoyándose en las definiciones dadas. En la demostración del Teor. 4 nos valemos del Teor. 1 para demostrar que la compleción de $f(x)$ es medible.

Teorema 5. Si $f(x)$ es medible, $f(x)$ y $g(x)$ están acotadas y $f(x) = g(x)$ casi por doquier, se tiene que $g(x)$ es medible y que $\int f(x)dx = \int g(x)dx$.

Demostración. Supongamos que $f(x)$ es medible por $\{V_{nh}\}$ y $\{A_n\}$, y hagamos que B_n sea una región de medida inferior a 2^{-n} y tal que $f(x) = g(x)$ en $E - B_n$; entonces, $f(x)$ será también medible por $\{V_{n-1,h}\}$ y $\{A_n \cup B_n\}$, con lo que, teniendo en cuenta la definición, es evidente lo que afirma el teorema.

6.2.3. *Las sumas y los productos de funciones medibles*

Teorema 1. Si las funciones medibles y acotadas $f(x)$ y $g(x)$ tienen el mismo dominio, Q, o si están definidas c.p.d. (casi por doquier), $f(x) + g(x)$ es medible a $\int f(x)dx + \int g(x)\,dx = \int (f(x) + g(x))dx$.

Demostración. Sean $f_0(x)$ y $g_0(x)$, respectivamente, unas compleciones de $f(x)$ y $g(x)$; entonces, $f_0(x) + g_0(x)$ es una compleción de

$f(x) + g(x)$, y a partir de la definición correspondiente (6.2.1, Def. 1) se infiere fácilmente la igualdad entre integrales escrita.

Teorema 2. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones medibles acotadas, $f(x)\,g(x)$ es medible.

Demostración. También ahora tenemos que si $f_0(x)$ y $g_0(x)$ son compleciones de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, $f_0(x)\,g_0(x)$ es una compleción de $f(x)\,g(x)$

Observación. Adviértase que en el Teor. 2 no es necesario suponer, como sucedía con el Teor. 1, que $f(x)$ y $g(x)$ tengan el mismo dominio; y la razón es que $f_0(x)\,g_0(x) \neq 0$ implica $f_0(x) \neq 0$ y $g_0(x) \neq 0$, mientras que $f_0(x) + g_0(x) \neq 0$ sólo implica que $f_0(x) \neq 0$ o que $g_0(x) \neq 0$. El dominio de $f(x)\,g(x)$ es, desde luego, la intersección de los dominios de $f(x)$ y de $g(x)$.

Definición 1. La *parte no negativa*, $f+(x)$, y la *no positiva*, $f-(x)$, de $f(x)$ se definen del modo siguiente:

$$f+(x) = \text{máx}\ (f(x),\ 0); \qquad f-(x) = \text{mín}\ (f(x),\ 0).$$

Es evidente que $f+(x)$ y $f-(x)$ tienen el mismo dominio que $f(x)$, y que $f(x) = f+(x) + f-(x)$.

Teorema 3. Si $f(x)$ está acotada y es medible, $f+(x)$ y $f-(x)$ son medibles, e

$$\int f+(x)dx + \int f-(x)dx = \int f(x)dx.$$

Demostración. Si $f_0(x)$ es una compleción de $f(x)$, se tiene que máx $(f_0(x),\ 0)$ es una compleción de $f+(x)$; y para $f-(x)$ se tiene el resultado análogo; por otra parte, $f+(x)$ y $f-(x)$ poseen el mismo dominio que $f(x)$, luego podemos terminar de efectuar la demostración aplicando el Teor. 1.

Teorema 4. Si $f(x)$ está acotada y es medible, $|f(x)|$ es medible.

Demostración. $|f(x)| = f+(x) - f-(x)$.

6.2.4. *Un teorema del límite*

Definición 1. La sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ es *convergente en el punto* x_0 si se conoce un número, N, tal que $f_n(x_0)$ esté definida para $n > N$ y si la sucesión $f_{N+n}(x_0)$ converge en el sentido corriente.

Teorema 1. Si las funciones de la sucesión $\{f_n(x)\}$ son medibles y están uniformemente acotadas, y si dicha sucesión converge c.p.d. hacia $f(x)$, se tiene que $f(x)$ es medible y que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = \int f(x)dx.$$

Demostración. Para cada m podemos encontrar un complemento de región, M_m, tal que $mM_m > 1 - 2^{-m-1}$ y que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ exista en todo punto de M_m; además, M_m contendrá un complemento de región situado, S_m, de medida $> 1 - 2^{-m}$. Para todo punto de S_m podremos encontrar un número $N(x)$, tal que $f_n(x)$ esté definida para $n > N(x)$ y que $|f(x) - f_n(x)| < 2^{-m}$ para $n > N(x)$; teniendo en cuenta 5.2.1, Teor. 1, y el teorema del abanico será posible encontrar un valor máximo de $N(x)$, al que llamaremos, por ejemplo, N_1; y de ahí que, si $n > N_1$, resulte que $f_n(x)$ está definida y que $|f(x) - f_n(x)| < 2^{-m}$ para todo x de S_m. Voy a suponer en todo lo que sigue que $n > N_1$.

S_m es el complemento de una región, B_m. Supongamos que $f_n(x)$ sea medible por $\{V_{npk}\}$ y $\{A_{np}\}$, y hagamos $C_{nm} = A_{nm} \cup B_m$, así como $K_{nm} = E - C_{nm}$; tendremos que $mC_{nm} < 2^{-m+1}$.

Para $x \in V_{nmh} \cap K_{nm}$ tenemos $|f(x) - f(x)| < 2^{-m}$, y además

$$(1) \qquad (h-1)2^{-m-1} - 2^{-m} \not> f(x) \not> (h+1)2^{-m-1} + 2^{-m};$$

luego podemos encontrar un número, k, tal que

$$(2) \qquad (k-1)2^{-m+2} \not> f(x) \not> (k+1)2^{-m+2}.$$

$$(3) \qquad |k2^{-m+2} - h2^{-m-1}| \leqq 2^{-m+1},$$ en este caso tendremos

lo cual demuestra que $f(x)$ es medible por $\{V_{nmh}\}$ y $\{C_{nm}\}$, siendo n función de m.

A partir de la desigualdad (8) de la demostración de 6.2.1, Teor. 1, inferimos que

$$(4) \qquad \left|\int f(x)dx - 2^{-m+2} \sum k\, mV_{nmh}\right| < (4M+5)2^{-m+3} \text{ y que}$$

$$(5) \qquad \left|\int f_n(x)dx - 2^{-m-1} \sum h\, mV_{nmh}\right| < (4M+5)2^{-m};$$

partiendo de (3) deducimos

$$(6) \qquad \left|2^{-m+2} \sum k\, mV_{nmh} - 2^{-m-1} \sum h\, mV_{nmh}\right| \not> \sum |2^{-m+2}k - 2^{-m-1}h| mV_{nmh} \not> 2^{-m+1} \sum mV_{nmh} \not> 2^{-m+1},$$

y en virtud de (4), (5) y (6) vemos que

$$(7) \qquad \left|\int f(x)dx - \int f_n(x)dx\right| < (36M+47)2^{-m}.$$

Como esta relación se cumple para todo $n > N(m)$, hemos demostrado el teorema.

6.3. Las especies puntuales medibles

6.3.1. *Conceptos fundamentales*

Definición 1. La *función característica*, $f_Q(x)$, de una especie puntual, Q, se define como sigue:

$$f_Q(x)=1 \text{ si } x \in Q\,;\ f_Q(x)=0 \text{ si } x \notin Q.$$

Definición 2. Q es medible si $f_Q(x)$ es *medible*, y la *medida* de Q es $mQ=\int f_Q(x)dx$.

Teorema 1. La definición 2 equivale a la siguiente:
Q es medible si, para todo n, pueden encontrarse un dominio elemental, V_n, y una región medible, A_m, tales que $mA_n < 2^{-n}$ y $Q \cap (E - A_n) = V_n \cap (E - A_n)$; entonces, $mQ = \lim_{n\to\infty} mV_n$ [L.E.J. Brouwer 1919A, p. 29]. En este caso decimos que Q es medible por $\{V_n\}$ y $\{A_n\}$.

Demostración. (I) Si $f_Q(x)$ es medible por $\{W_{nh}\}$ y $\{A_n\}$, Q será medible por $\{W_{n,2^{n+1}}\}$ y $\{A_n\}$.

(II) Si Q es medible por $\{V_n\}$ y $\{A_n\}$, se tendrá que $f_{1\,Q}(x)$ es medible por $\{W_{nh}\}$ y $\{A_n\}$, siendo $W_{n,2^n+1} = V_n$, $W_{n0} = E - V_n$ y vacíos los otros W_{nh}.

Teorema 2. Si Q es medible, $Q \cup (E - Q)$ es una especie casi llena.

Demostración. Sea Q medible por $\{V_n\}$ y $\{A_n\}$, tenemos, $E - A_n = M_n$. Supongamos que A_n contenga la frontera de V_n; entonces, $(Q \cup (E - Q)) \cap M_n = (V_n \cup (E - V_n)) \cap M_n = M_n$, luego $M_n \subset Q \cup (E - Q)$.

6.3.2. *Las condiciones de medibilidad*

Teorema 1. Si Q es medible, $E - Q$ es medible y $m((E - Q) = 1 - mQ$ [L.E.J. Brouwer 1919A, p. 30].

Demostración. Como en la demostración anterior, encontraremos un M_n tal que $Q \cup (E - Q) \supseteq M_n$ y que $mM_n > 1 - 2^{-n}$; entonces, para todo n, $f_Q(x) + f_{E-Q}(x) = 1$ en M_n; y de ahí que $f_Q(x) + f_{E-Q}(x) = 1$ casi por doquier. En consecuencia,

$$\int f_Q(x)dx + \int f_{E-Q}(x)dx = \int dx = 1.$$

Corolario. Si Q es medible, $E - (E - Q)$ es también medible y tiene la misma medida que aquélla, lo cual es muy cómodo, ya que a menudo nos permite no hacer caso de la doble negación en la teoría de la medida.

Teorema 2. Toda especie medible, Q, contiene para todo n un complemento de región medible y situado, S_n, de medida mayor que $mQ - 2^{-n}$.

Demostración. Sea Q medible por $\{V_n\}$ y $\{A_n\}$, y sea $E - A_n = M_n$. Podemos encontrar un $k = k(n) > n + 1$ tal que $|mV_k\, mQ| < 2^{-n-2}$; y también será $mM_k \lessdot 1 - 2^{-n-2}$. En virtud de 6.1.2, Teor. 1,

$$mV_k + mM_k \gtrdot 1 + m(M_k \cap V_k);$$
$$m(M_k \cap V_k) \lessdot mV_k + mM_k - 1 > mQ - 2^{-n-2} + 1 - 2^{-n-2} - 1 =$$
$$= mQ - 2^{-n-1}.$$

El complemento de región $M_k \cap V_k$ contiene un complemento de región situado, S_n, tal que $mS_n > m(M_k \cap V_k) - 2^{-n-1}$; luego $mS_n > mQ - 2^{-n}$. Y como $M_k \cap V_k = Q \cap V_k \subseteq Q$, el teorema queda demostrado.

Teorema 3. Una condición necesaria y suficiente para que la especie puntual Q sea casi llena es que sea medible y que $m\underset{x}{Q} = 1$.

Demostración. (I) La condición es necesaria, ya que si Q es casi llena, $f_Q(x)$ está definida c.p.d., de modo que, por 6.2.2, Teor, 1, $f_Q(x)$ es medible, y $f_Q(x) = 1$ c.p.d., por lo cual $mQ = 1$.

(II) La condición es suficiente en virtud del teorema precedente.

Teorema 4. Una condición necesaria y suficiente para que la especie puntual Q sea medible es que $Q \cup (E - Q)$ sea una especie puntual casi llena.

Demostración. (I) La condición es necesaria por 6.3.1, Teor. 2.

(II) La condición es suficiente: como (I) en la demostración anterior.

Teorema 5. Toda subespecie desgajable, R, de una especie medible, Q, es medible [B. van Rootselaar 1954, p. 5].

Demostración. $Q \cup (E - Q) \subseteq R \cup (E - R)$, pues todo elemento de Q pertenece o bien a R o a $E - R$, y $E - Q \subseteq E - R$. Por lo tanto, dado que $Q \cup (E - Q)$ es casi llena, $R \cup (E - R)$ es también casi llena, y R es medible.

Corolario. Si $Q \cup (E - Q)$ es medible, Q es medible.

Teorema 6. Si Q y R son medibles y $R \subseteq Q$, se tiene $mQ = mR + m(Q - R)$.

Demostración. En la especie casi llena

$$(Q \cup (E - Q)) \cap (R \cup (E - R))$$

están definidas las funciones características $f_Q(x)$, $f_R(x)$ y $f_{Q-R}(x)$; lo cual demuestra el teorema.

Teorema 7. Si Q y R son especies puntuales medibles y geométricamente congruentes, $mQ = mR$.

Demostración. $E - Q = E - R$, luego $1 - mQ = 1 - mR$.

6.3.3. *La unión y la intersección de especies puntuales medibles*

Teorema 1. Si Q y R son especies puntuales medibles, $Q \cap R$ y $Q \cup R$ son asimismo medibles. Además, $m(Q \cup R) \not> mQ + mR$; y si Q y R son disjuntas, $m(Q \cup R) = mQ + mR$ [L.E.J. Brouwer 1919A, p. 32].

Demostración. En la especie casi llena
$(Q \cup (E - Q)) \cup (R \cup (E - R))$ están definidas $f_{Q \cap R}(x)$ y $f_{Q \cup R}(x)$, y en dicha especie tenemos
$f_{Q \cap R}(x) = f_Q(x) f_R(x)$ y $f_{Q \cup R}(x) \not> f_Q(x) + f_R(x)$; en el caso de que Q y R sean disjuntas, $f_{Q \cap R}(x) = f_Q(x) + f_R(x)$.

Teorema 2. Si $\{Q_n\}$ es una sucesión de especies puntuales medibles (siendo $T_n = \bigcup_{h=1}^{n} Q_h$ y $m_n = mT_n$) y si es que existe el $\lim_{n \to \infty} m_n = m$, la especie $T_\omega = \bigcup_{h=1}^{\infty} Q_h$ es medible y $mT_\omega = m$ [L.E.J. Brouwer 1919A, p. 33].

Demostración. En virtud de 6.3.1, Teor. 2, podemos encontrar para toda Q_n, una región medible, B_n, tal que $mB_n < 2^{-h-n}$ y que $Q_n \cup (E - Q_n) \supseteq E - B_n$. Hagamos ahora $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, por lo cual $mB < 2^{-h}$. A continuación determinamos los números $n_1, n_2, \ldots$ de tal modo que $m - m_{n1} < 2^{-h-2}$, $m - m_{n2} < 2^{-h-3}$, etc., y después encontramos las regiones medibles $C_1, C_2 \ldots$ tales que $mC_i < 2^{-h-i}$ y que $E - C_i \subseteq E - (G_{n_i+1} - G_{n_i})$. Hagamos $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, con lo que $mC < 2^{-h}$, y asimismo $D = B \cup C$, con lo que $mD < 2^{-h+1}$. Supongamos que x sea un punto cualquiera de $E - D$; tendremos $x \in E - B_n$ para todo n por lo cual $x \in Q_n$ ó $x \in E - Q_n$; y en

consecuencia, será $x \in T_{n1}$ ó $x \in E - T_{n1}$. Además, si $x \in T_{n1}$, se tendrá $x \in T_\omega$.

Supóngase que $x \in E - T_{n1}$; como $x \in E - C_1$, x no pertenecerá a $E_{n2} - E_{n1}$, de modo que $x \in E - E_{n2}$.

De modo análogo, dado $x \in E - C_2$, tenemos $x \in E - T_{n3}$, y así sucesivamente. De ello se sigue que $x \in B - T_\omega$. Así pues, hemos demostrado que un punto cualquiera de $E - D$ o bien pertenece a T_ω o a $E - T_\omega$; por lo tanto, $f_{T\omega}$ está definida en $E - D$. Además, tenemos que, en $E - D$, $\lim_{n\to\infty} f_{T_n} = f_{T\omega}$; de lo cual se sigue el teorema en virtud de 6.2.4.

Teorema 3. Si $\{Q_n\}$ es una sucesión de especies puntuales medibles, siendo $R_n = \bigcap_{h=1}^{n} Q_h$ y $mR_n = m_n$, y existe el $\lim_{n\to\infty} m_n = m$, la especie $R_\omega = \bigcap_{h=1}^{\infty} Q_h$ es medible y $mR_\omega = m$ [L.E.J. Brouwer 1919 A, p 33].

La demostración es casi palabra por palabra la misma que la del teorema precedente.

Teorema 4. Toda región y todo complemento de región que sea medible es asimimo una especie puntual medible (tal y como se han definido éstas en 6.3.1); y las dos medidas son iguales [L.E.J. Brouwer 1919A, p. 30]

Demostración. Para las regiones, es consecuencia inmediata del teorema 2; para los complementos de región, se sigue de 6.3.2, Teor. 1.

Teorema 5. Si $f(x)$ es una función medible acotada, definida en la especie puntual Q, y si p es un número natural cualquiera, podemos encontrar unas especies puntuales medibles disjuntas, Q_{ph} (siendo $h = -l_p, \ldots, 0, \ldots, k_p$), tales que $\sum_h mQ_{ph} = 1$ y que

$$(h-1)2^{-p-1} < f(x) < (h+1)2^{-p-1} \quad \text{en } Q_{ph} \ (h \neq 0), \text{ y}$$
$$-2^{-p-1} < f(x) < 2^{-p-1} \quad \text{en } Q_{p0} \cap Q.$$

Demostración. Sea $f(x)$ medible por $\{V_{nh}\}$ y $\{A_n\}$; hagamos $M_n = E - A_n$ y $N_{nh} = M_n \cap V_{nh}$, y ordenemos los N_{nh} (siendo $n \geqq p$) de acuerdo con la regla siguiente: N_{nh} precederá a N_{mi} si, o bien $n < m$, o $n = m$, y además $h < i$. Sea R_{nh} la especie de los puntos de N_{nh} que no pertenezcan a ninguno de los complementos de región que precedan a N_{nh} en dicha sucesión, y dividamos ahora la sucesión de las R_{nh} en sucesiones parciales, empezando por $N_p, -l_p, \ldots, N_{p,kp}$, respectivamente, del modo que sigue: R_{ni} pertenecerá a la sucesión parcial que empiece por N_{ph} si h es el número más pequeño tal que

$$(h-1)2^{-p-1} \leqq (i-1)2^{-n-1} < (i+1)2^{-n-1} \leqq (h+1)2^{-p-1}.$$

Sea Q_{ph} la unión de las especies de la sucesión que empiecen por N_{ph}; entonces, las $Q_{p,-lp}, \ldots, Q_{p,kp}$ tendrán las propiedades buscadas.

Observación. Brouwer [L.E.J. Brouwer 1923, p. 9] demuestra que las Q_{ph} pueden considerarse especies limitantes exteriores; pero no voy a introducir aquí este concepto.

6.4. La integral como medida de las especies puntuales

A partir de ahora aparecerán especies puntuales tridimensionales, además de las planas; con objeto de evitar confusiones, denotaremos las tridimensionales mediante letras góticas mayúsculas.

Teorema 1. Sea $f(x)$ una función acotada que esté definida en una subespecie, S, de E, y sean $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$ las especies puntuales en el espacio de coordenadas, (p_1, p_2, p_3), tales que $(p_1, p_2, 0) \in S$ y que $0 \succ p_3 \succ f(p_1, p_2)$ y $0 \prec p_3 \prec f(p_1, p_2)$, respectivamente; entonces,

a) $f(x)$es medible si y sólo si $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$ son especies puntuales tridimensionales medibles;

b) si $f(x)$ es medible, $\int f(x)dx = m\,\mathfrak{T}_1 - m\,\mathfrak{T}_2$.

Demostración de a), condición suficiente ("si"). Sea $|f(x)| < M$ y hagamos que $\mathfrak{E}$ sea el dominio elemental del espacio definido por $(p_1, p_2, 0) \in E$ y $|p_3| < M$; sea $\mathfrak{T}_1$ medible por $\{\mathfrak{W}_{1n}\}$ y $\{\mathfrak{A}_{1n}\}$, y supongamos que la notación se elige de tal modo que $m\mathfrak{A}_{1n} < 2^{-2n}$. $\mathfrak{A}_{1n}$ queda definida por una sucesión de dominios elementales, $\{\mathfrak{U}_{1n,s}\}$; y elíjase i_q tal que $m\mathfrak{U}_{1n,i_q} > (1-2^{-2q-5})m\mathfrak{A}_{1n}$. Entonces, si

$$\mathfrak{W}_{1n,q} = \mathfrak{U}_{1n,i_{q+1}} - \mathfrak{U}_{1n,i_q}, \quad \text{se tiene} \quad m\mathfrak{W}_{1n,q} < 2^{-2q-5} m\mathfrak{A}_{1n} < 2^{-2n-2q-12}$$

Para cualquiera especie tridimensional, $\mathfrak{X}$, y cualquier punto, $x = (p_1, p_2, 0)$, denotemos mediante $\mathfrak{X}[x]$ la especie de los números z tales que $(p_1, p_2, z) \in \mathfrak{X}$; entonces, $\mathfrak{W}_{1n,q}[x]$ y $\mathfrak{A}\,1_{ni_1}[x]$ constarán de un número finito de segmentos. Hagamos que X_{1nq} sea la especie de los puntos x tales que $m\mathfrak{W}_{1nq}[x] \geqslant 2^{-n-q-4}$ y que X_{1n} sea la especie de los puntos x tales que $m\mathfrak{A}\,1_{ni1}[x] \geqslant 2^{-n-4}$; tendremos que $mX_{1nq} < 2^{-n-q-8}$, y que $mX_{1n} < 2^{-n-3}$, con lo que podremos encerrar X_{1nq} en una región, C_{1nq}, de medida $< 2^{-n-q-7}$, y X_{1n} en una región, C_{1n}, de medida $< 2^{-n-2}$. Haciendo $B_{1n} = C_{1n} \cup \bigcup_{q=1}^{\infty} C_{1nq}$, será $mB_{1n} < 2^{-n-1}$, y si $x \in E - B_{1n}$, se tendrá $m\mathfrak{U}_{1n}[x] < \sum_{q=0}^{\infty} 2^{-n-q-4} = 2^{-n-3}$. Ahora haremos $E - B_{1n} = M_{1n}$.

En este momento dividimos E en un conjunto finito de dominios elementales, Y_{nh}, tales que, si $x \in Y_{nh}$,

$$(2h-1)2^{-n-2} \leqslant m\mathfrak{B}_{1n}\,|x| \leqslant (2h+1)2^{-n-2};$$

al combinar esta desigualdad con el resultado anteriormente obtenido, o sea, el de que si $x \in \mathrm{M}_{1n}$ se tiene $m\ \mathfrak{A}_{1n}[\,x\,] < 2^{-n-3}$, y con el hecho de que $\mathfrak{B}_{1n} \cap (\mathfrak{E} - \mathfrak{A}_{1n}) = \mathfrak{T}_1 \cap (\mathfrak{E} - \mathfrak{A}_{1n})$, vemos que para $x \in Y_{nh} \cap M_{1n}$,

$$(h-1)2^{-n-1} \gtrdot f(x) \gtrdot (h+1)2^{-n-1};$$

para $h = 0$ esta desigualdad es válida en todos los puntos en los que $f(x)$ esté definida y sea $f(x) \lessdot 0$.

Hemos demostrado que $f+(x)$ es medible por $\{Y_{nh}\}$ y $\{B_{1n}\}$; y de la misma manera, partiendo de $\mathfrak{T}_2$, podremos demostrar que $f-(x)$ es medible. Luego, por 6.2.3, Teor. 1, $f(x)$ es medible.

Demostración de a), condición necesaria ("sólo si"). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(x)$ está acotada por 1. Sea $f(x)$ medible por $\{V_{nh}\}$ y $\{A_n\}$, y hagamos que $\mathfrak{B}_n$ sea la tira de aproximación n-ésima, que $\mathfrak{B}_n$ sea la región tridimensional de los puntos, (p_1, p_2, p_3), tales que $(p_1, p_2, 0), \in A_n$, y que $\mathfrak{C}_n$ sea la especie de los puntos en el espacio tal que $-2^{-n} < p_3 < 2^{-n}$; entonces, $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{W}_n \cup \mathfrak{B}_n \cup \mathfrak{C}_n$ es medible y $m\mathfrak{D}_n < 2^{-n+2}$; además, se puede encerrar fácilmente $\mathfrak{D}_n$ en una región, $\mathfrak{F}_n$, tales que $m\mathfrak{F}_n < 2^{-n+3}$. Fijémonos en el conjunto finito de bloques rectangulares, $\mathfrak{U}_{1n}$, formado por los puntos, (p_1, p_2, p_3), tales que, para algún h, $(p_1, p_2, 0) \in V_{nh}$ (siendo $h > 0$) y $0 \gtrdot p_3 \gtrdot h2^{-n-1}$. así como en el conjunto, $\mathfrak{U}_{2n}$, que contenga los puntos tales que, para algún h, tengamos $(p_1, p_2, 0) \in V_{nh}$ (siendo $h < 0$) y $0 \lessdot p_3 \lessdot h2^{-n-1}$. Tenemos que $\mathfrak{T}_1$ es medible por $\{\mathfrak{U}_{1n}\}$ y $\{\mathfrak{F}_n\}$, y que $\mathfrak{T}_2$ es medible por $\{\mathfrak{U}_{2n}\}$ y $\{\mathfrak{F}_n\}$.

Demostración de b). Se sigue inmediatamente de

$$m\mathfrak{U}_{1n} - m\mathfrak{U}_{2n} = 2^{-n-1} \sum_h hmV_{nh}$$

al pasar al límite.

Como aplicación vamos a demostrar el

Teorema 2. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones medibles y acotadas, máx $(f(x), g(x))$ y mín $(f(x), g(x))$ son también funciones medibles.

Demostración. Hagamos máx $(f(x), g(x)) = h(x)$, y mín $(f(x), g(x)) = k(x)$; y definiremos $\mathfrak{T}_i(F)$ (siendo $i = 1, 2$, y $F = f, g,$

h, k) de la misma forma que habíamos definido $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$ en el Teor. 1; tendremos

$$\mathfrak{T}_1(h) = \mathfrak{T}_1(f) \cup \mathfrak{T}_1(g). \qquad \mathfrak{T}_2(h) = \mathfrak{T}_2(f) \cap \mathfrak{T}_2(g).$$
$$\mathfrak{T}_1(k) = \mathfrak{T}_1(f) \cap \mathfrak{T}_1(g). \qquad \mathfrak{T}_2(k) = \mathfrak{T}_2(f) \cup \mathfrak{T}_2(g).$$

$\mathfrak{T}_i(f)$ y $\mathfrak{T}_i(g)$ son medibles; luego, en virtud de 6.3.3, Teor. 1, también lo son $\mathfrak{T}_i(h)$ y $\mathfrak{T}_i(k)$. De aquí se sigue que $h(x)$ y $k(x)$ son medibles.

Observación. Este teorema puede también demostrarse valiéndose del método de las compleciones (véase 6.2.2).

6.5. Las funciones no acotadas

6.5.1. *Las funciones medibles no acotadas*

Es posible ampliar inmediatamente a las funciones no acotadas la definición y muchas de las propiedades de las funciones medibles acotadas. Voy a repetirlas ahora para comodidad del lector.

Definición 1. Una función, f, definida en una subespecie Q, de E, es *medible* si, para todo número natural, n, se cumplen las siguientes condiciones:

(I) está dada una región plana medible, A_n, con $mA_n < 2^{-n}$;

(II) E está simplemente cubierto por los dominios elementales V_{nh} (siendo $h = -l_n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k_n$);

(III) si $M_n = E - A_n$, se tienen

a) para $x \in V_{nh} \cap M_n$ y $h \neq 0$,
$(h-1)2^{-n-1} \not> f(x) \not> (h+1)2^{-n-1}$;

b) para $x \in Q \cap V_{n0} \cap M_n$,
$-2^{-n-1} \not> f(x) \not> 2^{-n-1}$.

Teorema 1. Una función que esté definida casi por doquier es medible [B. van Rootselaar 1954, p. 7]

Demostración. Véase 6.2.2, Teor. 1.

Teorema 2. La función f es medible si y sólo si existe una compleción suya.

Demostración. Véase 6.2.2., Teors. 2 y 4.

Teorema 3. Si las funciones medibles f y g tienen el mismo dominio, o si ambas están definidas c.p.d., $f + g$ es medible.

Demostración. Véase 6.2.3, Teor. 1.

Teorema 4. Si f y g son funciones medibles, su producto es una función medible.

Demostración. Véase 6.2.3, Teor. 2.
Van Rootselaar [1956] ha dado otra demostración de los Teors. 3 y 4.

Teorema 5. Si f y g son funciones medibles y están definidas en el mismo dominio, máx (f, g) y mín (f, g) son funciones medibles.

Demostración. Si f_0 y g_0 son compleciones, respectivamente, de f y g, se tiene que máx (f_0, g_0) es una compleción de máx (f, g) y que mín (f_0, g_0) es una compleción de mín (f, g)

Corolario. Si f es una función medible, f^+ y f^- *son funciones medibles y* $|f|$ es también una función medible.

Teorema 6. Si las funciones de la sucesión $\{f_n\}$ son medibles y si la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge c.p.d. hacia $f(x)$, se tiene que f es una función medible

Demostración. Véase la primera parte de la demostración de 6.2.4, Teor. 1.

Definición 2. Para cualquier función, f, denotaremos mín $(f(x), 2^k)$ mediante ${}_kf(x)$.

Teorema 7. Una función no negativa, f, es medible si y sólo si ${}_kf(x)$ es medible para todo número natural k.

Demostración. La parte referente a la condición necesaria ("sólo si") es consecuencia inmediata del Teor. 5. Para demostrar la parte de la condición suficiente ("si"), supongamos que ${}_kf$ sea medible por $\{V_{knh}\}$ y $\{A_{kn}\}$, y que cada A_{kn} contenga las fronteras de los V_{knh} correspondientes. Hagamos $E - A_{kn} = M_{kn}$; entonces, $W_{kn} = \bigcup_{h>0} (V_{knh} \cap M_{kn})$ es un complemento de región. De ahora en adelante, k será un número natural fijo. En virtud de 6.2.1, Teor. 2, W_{kn} contiene un complemento de región situado, S_n, tal que $mS_n > mW_{kn} - 2^{-n}$; ${}_kf$ y f están definidas por doquier en S_n; y en virtud de 5.2.1, Teor. 4, f está acotada en S_n: por ejemplo, $f(x) < 2^l$ en S_n. Si denotamos $S_n \cup (V_{kn0} \cap m_{kn})$ por K_n resulta que K_n es un complemento de región con las siguientes propiedades:

(i) $mK_n > 1 - 2^{-n+1}$,
(ii) $x \in K_n \rightarrow f(x) < 2^l$.

Por hipótesis, ${}_lf$ es medible por $\{V_{lnh}\}$ y $\{A_{ln}\}$; lo cual quiere decir que

$$x \in V_{lnh} \cap M_{ln} \;\&\; h > 0 \to (h-1)2^{-n} \geqslant {}_lf(x) \geqslant (h+1)2^{-n},$$
$$x \in V_{ln0} \cap M_{ln} \cap Q \quad \to \quad 0 \geqslant {}_lf(x) \geqslant 2^{-n}$$

(siendo Q el dominio de f).

Estas desigualdades continúan siendo válidas si M_{ln} se substituye por $M_{ln} \cap K_n = H_{ln}$. En efecto, $mH_{ln} > 1 - 2^{-n+2}$; y como en H_{ln} se tiene $f(x) = {}_lf(x)$, tendremos

$$x \in V_{lnh} \cap H_{ln} \;\&\; h > 0 \to (h-1)2^{-n} \geqslant f(x) \geqslant (h+1)2^{-n},$$
$$x \in V_{ln0} \cap H_{ln} \cap Q \quad \to \quad 0 \geqslant f(x) \geqslant 2^{-n};$$

así pues, considerando l como función de n, vemos que f es medible por $\{V_{lnh}\}$ y $\{D_{ln}\}$, siendo $H_{ln} = E - D_{ln}$.

6.5.2. *Las funciones sumables*

Definición. Una función medible, $f(x)$, es *sumable* si existe

$$\lim_{k\to\infty} \int {}_kf^+(x)dx + \lim_{l\to\infty} \int {}_lf^-(x)dx\,;$$

y este límite es $\int f(x)dx$.

Teorema 1. Si f y g tienen el mismo dominio, $f(x)$ es sumable y $g(x)$ es medible, y asimismo $0 \geqslant g(x) \geqslant f(x)$, se tiene que $g(x)$ es sumable.

Demostración. Supongamos que $g(x) \geqslant f(x)$ sea verdadera en la especie puntual casi llena Q. La desigualdad

(1) mín $(g(x), 2^{k+m}) -$ mín $(g(x), 2^k) \geqslant$ mín $(f(x), 2^{k+m}) -$ mín $(f(x), 2^k)$ es evidente para los puntos, x, de Q en los que

(2) o bien $g(x) \leqslant 2^k$, ó $g(x) < 2^k$;

por lo tanto, si para algún x de Q fuese falsa (1), x no podría satisfacer la condición (2); pero esto es una contradicción.

Finalmente, si (1) no puede ser falsa es que es verdadera. Y a partir de (1) inferimos que

$$\int_{k+m} g(x)dx - \int_k g(x)dx \geqslant \int_{k+m} f(x)dx - \int_k f(x)dx,$$

de donde se sigue que existe el $\lim_{k\to\infty} \int {}_kg(x)dx$.

Teorema 2. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones sumables con el mismo dominio, $f(x) + g(x)$ es sumable y

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Daremos la demostración mediante tres lemas.

Lema 1. El Teor. 2 es verdadero para funciones $f(x)$ y $g(x)$ no negativas.

Demostración. Hagamos $f(x) + g(x) = h(x)$; entonces, $h(x)$ será medible en virtud de 6.5.1, Teor. 3. Tendremos

$$_{k-1}f(x) + _{k-1}g(x) \succ _kh(x) \succ _kf(x) + _kg(x).$$

pasando ahora al límite, vemos que $\int h(x)dx$ existe y es igual a $\int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Lema 2. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones sumables, definidas en el mismo dominio y tales que $0 \succ g(x) \succ f(x)$, también $f(x) - g(x)$ es sumable.

Demostración. En virtud de 6.5.1, Teor. 3, $f - g$ es medible; además, $0 \succ f(x) - g(x) \succ f(x)$, de modo que $f - g$ será sumable por el Teor. 1.

Lema 3. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones sumables no negativas con el mismo dominio, $f(x) - g(x)$ es sumable.

Demostración. Si $f(x) - g(x) = h(x)$, se tienen

$$h^+(x) = \text{máx}\,(f(x), g(x)) - g(x),$$
$$-h^-(x) = g(x) - \text{mín}\,(f(x), g(x)).$$

Como $0 \succ g(x) \succ$ máx $(f(x), g(x)) \succ fs(x) + g(x)$ y $0 \succ$ mín $(f(x), g(x)) \succ g(x)$, vemos que, en virtud de 6.5.1, Teor. 5, 6.5.2, Teor. 1, y el lema 2, $h(x)$ es sumable.

Demostración del teorema 2.

$$f(x) + g(x) = (f^+(x) + g^+(x)) - (-f^-(x) - g^-(x))$$

es sumable en virtud de los lemas 1 y 3.

Teorema 3. Si f y g tienen el mismo dominio, $f(x)$ es medible y $g(x)$ es sumable; y si $|f(x)| < g(x)$, se tiene que $f(x)$ es sumable.

Demostración. Se cumplen $0 \succ f+(x) \succ |f(x)|$ y $0 \succ -f-(x) \succ |f(x)|$; de ello se sigue que

$$0 \succ f+(x) < g(x) \text{ y que } 0 \succ -f-(x) < g(x).$$

Teniendo en cuenta el Teor. 1, resulta que $f+(x)$ y $-f-(x)$ son sumables; y como $f(x) = f+(x) - (-f-(x))$, el lema 3 nos da el resultado buscado.

Teorema 4. Si $f_n(x)$ es sumable para todo n y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ uniformemente, $f(x)$ es sumable y $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = \int f(x)dx$.

Demostración. Para valores suficientemente grandes de n,

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \text{ luego por el Teor. 3, } f(x) - f_n(x)$$

es sumable; y por el Teor. 2 también es sumable $f(x)$.

Teorema 5. Si $f(x)$ es sumable y $g(x)$ está acotada y es medible, $h(x) = f(x)g(x)$ es sumable.

Demostración. Supóngase que $|g(x)| < s$; entonces, ${}_k f(x)g(x)$ será medible para todo k de modo que $h(x)$ será medible.

Hagamos primeramente que sean $f(x) \not< 0$ y $g(x) \not< 0$. Si $f(x)$ es sumable, $sf(x)$ lo será también, por lo que sólo tenemos que ocuparnos del caso en que sea $g(x) < 1$; vemos después claramente que, para $l > k$,

$$\text{mín } (fg, 2^l) - \text{mín } (fg, 2^k) \not> \text{mín } (f, 2^l) - \text{mín } (f, 2^k).$$
$$\int {}_l h(x)dx - \int {}_k h(x)dx \not> \int {}_l f(x)dx - \int {}_k f(x)dx.$$

lo cual demuestra que $h(x)$ es sumable.

En el caso general tendremos

$$h^+(x) = f^+(x)g^+(x) + f^-(x)g^-(x),$$
$$h^-(x) = f^+(x)g^-(x) + f^+(x)g^+(x);$$

por consiguiente, $h+(x)$ y $h-(x)$ son sumables.

6.5.3. *Las funciones sumables en una especie puntual*

Definición 1. La función $f(x)$ *es medible en la especie* G si $f(x)f_G(x)$ es medible.

La función $f(x)$ es *sumable en* G si $f(x)f_G(x)$ es sumable; y en este caso,

$$\int_G f(x)dx = \int_E f(x)f_G(x)dx.$$

Teorema 1. Una función medible lo es en toda especie medible, G; una función sumable lo es en toda especie medible, G.

Demostración. (I) Si $f(x)$ está acotada, $f(x)f_G(x)$ es medible en virtud de 6.2.3, Teor. 2.

(II) Si $f(x)$ no está acotada, ${}_kf(x)f_G(x)$ es medible para todo k, en virtud de (I).

(III) Por el teorema inmediatamente anterior, $f(x)f_G(x)$ es sumable.

Definición 2. $\int_a^b f(x)dx = \int_G f(x)\,dx$, siendo G el intervalo (a, b).

Teorema 2. Si $f(x)$ es sumable,

$$\lim_{mG\to 0} |\int_G f(x)dx| = 0 \text{ uniformemente.}$$

Demostración. (I) Si $f(x)$ está acotada,
$|\int_G f(x)dx| \not> (\text{máx } |f(x)|)mG$

(II) En el caso general determinamos k de suerte que

$$\int_E (f^+(x) - {}_kf^+(x))dx < 2^{-n-2} \quad \text{y que}$$
$$\int_E (f^-(x) - {}_kf^-(x))dx < 2^{-n-2}.$$

para $mG < 2^{-n-k-2}$ tendremos

$$|\int_G f(x)dx| \not> \int_G {}_kf^+(x)dx + \int_G {}_kf^-(x)dx +$$
$$+ \int_G (f^+(x) - {}_kf^+(x))dx + \int_G (f^-(x) - {}_kf^-(x))dx \not>$$
$$\not> 2^k mG + 2^k mG + 2^{-n-2} + 2^{-n-2} < 2^{-n}.$$

Observación. Van Rootselaar [B. van Rootselaar 1954, p. 16] ha dado otra definición de $\int_G f(x)dx$, que tal vez sea más general que la presentada aquí.

6.5.4. *Teoremas de límites*

Teorema 1. Si la sucesión de funciones no negativas, $\{f_n(x)\}$, satisface las condiciones

(I) toda f_n es sumable,
(II) $f_{n+1}(x) \not< f_n(x)$,
(III) el límite $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existe por doquier, y
(IV) $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$ existe,

se tiene que $f(x)$ es sumable y que

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx.$$

Demostración. Tenemos $\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} {}_kf_n(x)dx$; y

como $\int_k f_n(x)dx$ es no decreciente al crecer n y k, podemos invertir el orden de los límites, con lo que se obtiene

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_k f_n(x)dx.$$

Por otra parte, la sucesión $\{_k f_n(x)\}$ satisface las condiciones de 6.2.4, Teor. 1, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \int_k f_n(x)dx = \int_k f(x)dx,$$

lo cual demuestra el teorema.

CLAS. ¿Es válido intuicionísticamente ese teorema sobre la inversión del orden de los límites en una serie doble?
IN. Sí, y les propongo como ejercicio su demostración.

Teorema 2. (Teorema de Egorof [B. van Rootselaar 1954, p. 10].) Si todas las funciones de la sucesión $\{f_n\}$ están definidas en la especie medible Q, y si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existe c.p.d. en Q, se tiene que, para todo m es posible encontrar una subespecie medible, Q_m, de Q tal que $mQ - mQ_m < 2^{-m}$ y que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ uniformemente en Q_m.

Demostración. Sea Q_0 la especie de medida $mQ_0 = mQ$, en la que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Vamos a elegir para Q_m un complemento de región situado y medible, cuya medida sea mayor que $mQ - 2^{-m}$ y que esté contenido en Q_0 (6.3.2, Teor. 2, y 5.1.2, Teor. 2). Entonces, Q_m coincide con un abanico puntual, D (5.2.1., Teor. 1), y todo elemento, x, de D lleva asociado un número natural, $N(x)$, tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < 2^{-p} \text{ para } n > N(x).$$

El teorema del abanico nos certifica que es posible encontrar un número natural, B, tal que $N(x)$ dependa únicamente de los B primeros componentes de la spi x; de donde se sigue que se puede calcular un valor máximo, N_0, de $N(x)$; luego

$$|f_n(x) - f(x)| < 2^{-p} \qquad \text{para todo } n > N_0 \text{ y todo } x \text{ de } Q_m.$$

6.6. El espacio de Hilbert

Voy a demostrar que las funciones, $f(x)$ que estén definidas c.p.d. y tales que $f^2(x)$ sea sumable forman un espacio de Hilbert, B^2.

Es posible definir un espacio real de Hilbert de varios modos; de ellos, los dos siguientes son pertinentes ahora:

(I) la definición constructiva como género de sucesiones (positivamente) convergentes de números reales en el que el producto interno se defina como es corriente hacerlo;
(II) la definición axiomática llevada a cabo por los axiomas de von Neumann [J. von Neumann 1929, pp. 64-6], [M.H. Stone 1932, p. 3].
Puede demostrarse que estas dos definiciones son intuicionísticamente equivalentes si se modifican ligeramente los axiomas de la forma que indicamos a continuación.
(Por mor de la brevedad, llamaremos *vectores* a los elementos del espacio de Hilbert, H.)

Axiomas para el espacio de Hilbert.

Axiomas I. Los axiomas usuales para el espacio real lineal,

Axiomas II. Los axiomas usuales para el producto interno, entre ellos:

IIa $(x,x) \not< 0$;
IIb si $(x, x) = 0$, se tiene $x = 0$.

(El elemento nulo se denota, simplemente, por 0.)
Además se introduce una relación de separación mediante la

Definición 1. *x está separado de* 0 ($x \# 0$) si $(x, x) \# 0$;
x está separado de y ($x \# y$) si $x - y \# 0$.

Definición 2. Los vectores $x^1, ..., x^k$ son *libres unos con respecto a otros* si, para todo conjunto de k números reales, $a_1, .., a_k$, tales que $a_i \# 0$ para al menos un valor de i, se tiene

$$a_1 x^1 + ... + a_k x^k \# 0.$$

Axioma III. Para todo k podemos encontrar k vectores libres unos con respecto a otros.

Axioma IV. (Axioma de separabilidad en su versión fuerte).
Existe una sucesión, $S = \{e^n\}$ de vectores tales que toda subsucesión finita de S es libre y que el género de las combinaciones lineales finitas de los vectores de S es denso en H.

Axioma V: el axioma de completitud en su forma usual.

Observación. El axioma III es consecuencia del IV.

Con objeto de formular el teorema que hemos anunciado necesitamos las definiciones que siguen.

Definición 3. $f(x) \approx 0$ significa que $f(x) = 0$ c.p.d. $f(x)$ es *equivalente* a $g(x)$ —que se escribe $f(x) \approx g(x)$— si $f(x) - g(x) \approx 0$. Llamaremos *metafunción* al género de las funciones que sean equivalentes a una función dada.

En el presente apartado, $f(x)$ significa unas veces una función, y otras la metafunción de la que la función $f(x)$ sea miembro.

Teorema 1. El género, B^2, de las metafunciones $f(x)$ tales que la función $f(x)$ esté definida c.p.d. y que $f^2(x)$ sea sumable se convierte en un espacio de Hilbert si $f(x), g(x))$ se define como expresión denotadora de $\int f(x)g(x)dx$.

Demostración. De los axiomas I y II, sólo es preciso demostrar IIb.

Tenemos que demostrar que $(f, f) = 0$ implica $f \approx 0$. Hagamos $h(x) = f^2(x)$; entonces, ${}_k f(x)$ es medible y $\int {}_k h(x)dx = 0$. Sea ${}_k h(x)$ medible por $\{V_{nh}\}$ y $\{A_n\}$; y supongamos además que $m(\bigcup_{h>1} V_{nh}) > 2^{-n}$; haciendo $M_n = \bigcup_{h>1} V_{nh} - A_n$, se tiene que $mM_n > 0$.

Definamos ahora $g(x) = {}_k h(x)$ en M_n y $g(x) = 0$ en $E - M_n$; entonces,

$$\int g(x)dx \not> \int f^2(x)dx = 0 \text{ e}$$
$$\int g(x)dx > 2^{-n-1} mM_n > 0.$$

Así pues, la suposición de que $m(\bigcup_{h>1} V_{nh}) > 2^{-n}$ ha llevado a una contradicción, por lo cual

$$m(\bigcup_{h>1} V_{nh}) \not> 2^{-n}.$$

Encerremos ahora $\bigcup_{h>1} V_{nh}$ en una región, B_n, de medida $< 2^{-n+1}$; haciendo $C_n = A_n \cup B_n$, tendremos que $mC_n < 2^{-n+2}$, y en $E - C_n$ tendremos que $f(x) < 2^{-n}$. Hagamos $D_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k$; entonces, $mD_n < 2^{-n+3}$. Estableciendo $N_n = E - D_n$, resulta que en N_n tenemos $f(x) < \sum_{\infty}^{2} 2^{-n-p}$ para todo p, de modo que $f(x) = 0$. Resulta, pues, que $\bigcup_{k=n} N_k$ es una especie de medida 1 en la que $f(x) = 0$.

También se satisfacen los axiomas III y IV; la demostración de este hecho es idéntica a su demostración clásica.

Demostración del axioma V (o teorema de Riesz-Fischer).

Lo voy a formular como sigue:

Teorema 2. Sea f_n una sucesión de funciones en B^2 tales que $(f_m - f_n)^2\,dx$ tienda a 0 si m y n tienden a infinito. Entonces existe una función, f, en B^2 tal que $\lim_{n\to\infty} \int (f - f_n)^2 dx = 0$ [A. Heyting 1951].

La demostración sigue de cerca a la de von Neumann.
Primeramente determinamos los enteros, N_p , tales que

$$\int (f_m - f_n)^2 dx < 2^{-3p} \text{ para } m, n \geqq N_p.$$

Con objeto de abreviar, hagamos $g_p = |f_{N_p+1} - f_{N_p}|$ y $h_p(x) = \text{mín}\,(g_p(x), 1)$. Valiéndonos del método de 6.3.3, Teor. 5, determinamos las especies medibles disjuntas, Q_{ph} (siendo $h = 0, \ldots, s$), tales que $\sum_h mQ_{ph} = 1$ y que

$$(h-1)2^{-p-1} < h_p(x) < (h+1)2^{-p-1} \text{ en } Q_{ph}\ (h \neq 0), \text{ y}$$

$$-2^{-p-1} < h_p(x) < 2^{-p-1} \qquad \text{en } Q_{p0} \cap Q;$$

definamos ahora $Q_{p0} \cup Q_{p1} = R_p$ y $\bigcup_{h>1} Q_{ph} = S_p$; entonces,

$$2^{-3p} > \int h_p^2 dx = \int_{R_p} h_p^2 dx + \int_{S_p} h_p^2 dx \not< 2^{-2p-2}\, mS_p,$$

por lo cual $mS_p < 2^{-p+2}$ y $mR_p > 1 - 2^{-p+2}$. Haciendo $\bigcap_{p\geqq q} R_p = T_q$ se tiene $mT_q > 1 - 2^{-q+3}$; y si, finalmente, $\bigcup_q T_q = T_0$, se tiene que $mT_0 = 1$.

La sucesión $\{f_{N_p}\}$ converge en T_0 hacia una función, f, convergencia que es uniforme en cualquier T_q:

$$\int_{T_q} (f_m - f_{N_p})^2 dx \not> \int_E (f_m - f_{N_p})^2 dx < \varepsilon \text{ para } m, N_p > N(\varepsilon), \text{ e}$$

$$\text{(A)} \quad \int_{T_q} (f_m - f)^2 dx \not> \varepsilon \text{ para } m > N(\varepsilon).$$

El resultado que buscamos se obtiene pasando al límite para $q \to \infty$. Clásicamente puede hacerse esto sin más que observar que el primer miembro de (A) forma para $q = 1, 2, \ldots$ una sucesión monótona acotada; pero intuicionísticamente es preciso demostrar la existencia del límite mediante un cálculo directo. Para hacerlo demostraremos primero un lema.

Lema. Si

1. toda función de la sucesión $\{f_n(x)\}$ es medible,
2. $\int f_n^2(x)dx$ existe para todo n, y
3. $f_n(x)$ converge uniformemente hacia $f(x)$ cuando $n \to \infty$,

$f^2(x)$ es sumable y $\lim_{n\to\infty} \int f_n^2(x)dx = \int f^2(x)dx$.

Demostración. En virtud de 6.5.2, Teor. 4, $f(x)$ es sumable, y también lo es $|f(x)|$. Hagamos que ϵ sea un número positivo arbitrariamente pequeño y que $\eta = \frac{\varepsilon}{6\int(|f(x)|+1)dx}$; es posible encontrar un número, N, tal que

$$|f(x)-f_n(x)|<\eta \text{ para } n>N;$$

entonces,

$$|f_m^2(x)-f_n^2(x)|<2\eta|f_m(x)+f_n(x)|<$$
$$<4\eta(|f(x)|+\eta) \quad \text{para } m, n>N, \text{ y}$$
$$|\int (f_m^2(x)-f_n^2(x))dx|<4\eta\int(|f(x)|+1)dx<\varepsilon.$$

De lo cual se sigue que $\lim_{n\to\infty}\int f_n^2(x)dx=S$ existe.

Elegiremos un valor fijo de $n > N$ tal que

$$|\int f_n^2(x)dx-S|<\varepsilon/3; \tag{1}$$

lo mismo que antes encontramos que

$$|f^2(x)-f_n^2(x)|<2\eta\,(|f(x)|+\eta),$$

luego, *a fortiori*

$$|{}_kf^2(x)-{}_kf_n^2(x)|<2\eta\,(|f(x)|+\eta), \text{ y}$$
$$|\int {}_kf^2(x)dx-\int {}_kf_n^2(x)dx|<2\eta\int(|f(x)|+1)dx=\varepsilon/3; \tag{2}$$

y además, en virtud de la definición de 6.5.2 podemos determinar un K tal que

$$|\int f_n^2(x)dx-\int {}_kf_n^2(x)dx|<\varepsilon/3 \text{ para } k>K. \tag{3}$$

Teniendo en cuenta (1), (2) y (3) vemos que

$$|\int {}_kf^2(x)dx-S|<\varepsilon \text{ para } k>K;$$

así pues, $\int f^2(x)dx = S$.

Continúo ahora con la demostración del Teor. 2.

Para abreviar, hagamos $f_{N_p}(x) = F_p(x)$. A partir de la desigualdad de Schwartz se siguen (siendo $q > p$)

$$\sqrt{\int F_p^2(x)dx}\nearrow \sqrt{\int F_q^2(x)dx}+\sqrt{\int (F_p(x)-F_q(x))^2dx}.$$
$$|\sqrt{\int F_p^2(x)dx}-\sqrt{\int F_q^2(x)dx}|\nearrow \sqrt{\int (F_p(x)-F_q(x))^2dx}<2^{-p}; \tag{1}$$

por lo tanto, existe el $\lim_{p\to\infty} \sqrt{\int F_p^2(x)dx}$, y como consecuencia también existe el $\lim_{p\to\infty} \int F_p^2(x)dx$ haremos $\lim_{p\to\infty} \int F_p^2(x)dx = S$. (Obsérvese que la desigualdad (1) continúa cumpliéndose cuando las integrales se toman sobre una T_k arbitraria.) Para el caso en que $r > r_0$, tendremos

$$\int_{T_k} F_r^2(x)dx < S+1 \text{ y } \sqrt{\int_{T_k} F_r^2(x)dx} < \sqrt{(S+1)} = A, \text{ y además}$$
$$\left|\int_{T_k} F_p^2(x)dx - \int_{T_k} F_q^2(x)dx\right| < 2A2^{-p} \text{ para } q > p > r_0;$$

al converger uniformemente $F_q(x)$ hacia $f(x)$ en T_k cuando $q \to \infty$, podremos pasar al límite (6.5.2, Teor. 4), o sea, tendremos:

$$(2) \qquad \left|\int_{T_k} F_p^2(x)dx - \int_{T_k} f^2(x)dx\right| < A2^{-p+1} \text{ para } p > r_0;$$

por otra parte, por ser $mT_0 = 1$ y $\lim_{p\to\infty} \int F_p^2(x)dx = S$, se tiene

$$(3) \qquad \left|\int_{T_0} F_p^2(x)dx - S\right| < 2^{-n-2} \text{ para } p > r_1(n),$$

y en virtud de 6.5.3, Teor. 2.

$$(4) \qquad \int_{T_0 - T_k} F_p^2(x)dx < 2^{-n-2} \text{ para } k > r_2(n, p).$$

Una vez dado n, elegimos p de tal modo que $p > r_0$, $p > r_1(n)$ y $A2^{-p+1} < 2^{-n-2}$; entonces, debido a (2), (3) y (4),

$$\left|\int_{T_k} f^2(x)dx - S\right| < 2^{-n} \text{ para } k > r_2(n),$$

con lo cual $\lim_{k\to\infty} \int_{T_k} f^2(x)dx = S$, o sea, más explícitamente,

$$(5) \qquad \lim_{k\to\infty} \lim_{h\to\infty} \int_{T_k} h f^2(x)dx = S.$$

Puesto que $\int_{T_k} h f^2(x)dx$ es monótona y no disminuye, tanto con respecto a k como con respecto a h, valiéndonos de la propiedad ya mencionada en la demostración de 6.5.4, Teor. 1, podemos invertir el orden de los límites:

$$S = \lim_{h\to\infty} \lim_{k\to\infty} \int_{T_k} h f^2(x)dx = \lim_{h\to\infty} \int_{T_0} h f^2(x)dx = \int_{T_0} f^2(x)dx;$$

además, como ya se ha demostrado la existencia de esta última integral,

$$\int_{T_0} (f(x) - f_n(x))^2 dx$$

existe asimismo, y en virtud de 6.5.3, Teor. 2, es igual a

$$\lim_{k\to\infty} \int_{T_k} (f(x) - f_n(x))^2 dx.$$

Por consiguiente, de acuerdo con la fórmula (A),

$$\int_{T_0} (f(x) - f_n(x))^2 dx \not> \varepsilon \text{ para } m > N(\varepsilon).$$

y como $mT_0 = 1$, queda demostrado el teorema.

6.7. La derivación

No voy a ocuparme aquí de la teoría de la derivación. Van Rootselaar [B. van Rootselaar 1954, p. 33] ha adaptado a los requisitos intuicionistas la demostración de los principales teoremas.

VII. LOGICA

7.1. Cálculo proposicional

La palabra "lógica" posee muy distintos significados; no intentaré dar una definición de la lógica intuicionista, como tampoco he comenzado este cursillo por una definición de las matemáticas; con todo, será conveniente hacer una observación preliminar: nuestra lógica se refiere solamente a proposiciones matemáticas, y la cuestión de si admite alguna aplicación fuera de ellas no nos atañe ahora. En el presente capítulo, las letras p, q y r aparecen como variables para proposiciones matemáticas, y emplearemos las letras góticas $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{r}$ como abreviaciones de proposiciones de esa misma índole. No tengo la pretensión de ofrecer un tratamiento formal completo de la lógica intuicionista: en el libro de Kleene [S.C. Kleene 1952] se encuentra, perfectamente accesible, un sistema formal que codifica todas las inferencias lógicas de la matemática intuicionista conocidas hasta el momento; y allí hallará también el lector una exposición de las investigaciones metamatemáticas acerca de tal sistema. De entre las investigaciones posteriores mencionaré los trabajos de E.W. Beth [1956 y 1959], R. Harrop [1956 y 1960], K. Schröter [1956 y 1957], G. Kreisel y H. Putnam [1957], J. Porte [1958], H. Rasiowa y R. Sikorski [1959], R. Sikorski [1959], T. Skolem [1958], S.C. Kleene [1962] y N.N. Vorob'ev [1958]; Kreisel [1958 y 1962A] ha formulado el problema de la completitud para la lógica intuicionista y ha obtenido importantes resultados al respecto; también ha propuesto una teoría formal de las construcciones [1962] destinada a servir de base para la matemática intuicionista. Aquí sólo les llamaré la atención sobre ciertas fórmulas que expresan métodos interesantes de razonar y les haré ver que tales métodos son intuitivamente claros dentro de los dominios de la matemática intuicionista.

Será necesario fijar lo más firmemente que sea posible el significado de las conectivas lógicas; cosa que voy a hacer dando condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales pueda aseverarse una expresión compleja.

7.1.1. *La interpretación de los signos*

La *conjunción*, $\wedge$, no ofrece dificultad alguna: $\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}$ puede aseverarse si y sólo si pueden aseverarse tanto $\mathfrak{p}$ como $\mathfrak{q}$.

Ya he hablado antes (2.2.5, al final) de la *adyunción* ["dis-

junction"], $\vee$; puede aseverarse $\mathfrak{p} \vee \mathfrak{q}$ si y sólo si es posible aseverar al menos una de las proposiciones $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$.

La negación, $\neg$, es la negación matemática fuerte de que ya nos hemos ocupado (en 2.2.2). Con objeto de proporcionar una aclaración más explícita, recordaremos que toda proposición matemática, $\mathfrak{p}$, exige siempre una construcción matemática dotada de ciertas propiedades, de modo que será posible aseverarla en cuanto se haya llevado a cabo dicha construcción: en tal caso, decimos que la construcción *demuestra* la proposición $\mathfrak{p}$, y la llamamos una *demostración* de $\mathfrak{p}$. Pero asimismo, por mor de la brevedad, denotamos con $\mathfrak{p}$ cualquier construcción a la que apunte la proposición $\mathfrak{p}$; entonces, puede aseverarse $\neg\mathfrak{p}$ si y sólo si poseemos una construcción que, a partir de la suposición de que se haya efectuado una construcción $\mathfrak{p}$, lleve a una contradicción.

SIG. ¿No es necesario aclarar el concepto de contradicción?

IN. Creo que es preciso tomar la contradicción como concepto primitivo: parece muy difícil reducirla a nociones más sencillas, y es siempre fácil reconocerla como tal: prácticamente en todos los casos puede llevársela a la forma $1 = 2$. Fijémonos, como ejemplo sencillo, en la proposición $\mathfrak{p} \equiv (\sqrt{2}$ es un racional), que exige que se construyan enteros, a y b, tales que $a^2 = 2b^2$; valiéndonos de un argumento perfectamente conocido, podemos suponer que a y b son primos entre sí; por otra parte, a será par, luego 4 dividirá a a^2, por lo cual dividirá también a $2b^2$; de ahí que a y b hayan de tener el divisor común 2, cosa que contradice el hecho de que a y b sean primos entre sí. Es posible presentar esta contradicción de la siguiente forma: el m.c.d. de a y b es al mismo tiempo 1 y 2.

Algunos matemáticos, en especial Griss, han suscitado ciertas objeciones contra el empleo de la contradicción en el razonamiento matemático; de ellas me ocuparé en el capítulo siguiente, y adopto aquí el punto de vista de que el concepto de contradicción es suficientemente claro y de que la negación que se basa en él puede utilizarse en las matemáticas.

Se puede aseverar la *implicación*, $\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}$, si y sólo si poseemos una construcción, $\mathfrak{r}$, que, añadida a cualquier otra construcción que demuestre $\mathfrak{p}$ (supuesto que se lleve a cabo esta última), efectúe automáticamente una construcción que demuestre $\mathfrak{q}$. Dicho de otro modo: una demostración de $\mathfrak{p}$ juntamente con $\mathfrak{r}$ constituirá una demostración de $\mathfrak{q}$.

Casi todas las demostraciones que se encuentran en este libro están formadas por construcciones tales como la $\mathfrak{r}$ de que acabo de hablar; uno de los primeros casos de ello, y sumamente claro, es la demostración de 2.2.3, Teor. 2.

Se puede aseverar una fórmula lógica con variables proposicionales por ejemplo, $\mathfrak{A}(p, q, \ldots)$, si y sólo si puede aseverarse $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots)$, para proposiciones $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ arbitrarias; esto es, si contamos con un método de construcción que por especialización nos proporcione la

construcción exigida por $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots)$. Fijémonos, por ejemplo, en

$$\mathfrak{A}(p, q) \equiv (p \wedge \cdot\ p \to q \cdot \to q);$$

$\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ exige una construcción, E, que, a partir de una demostración, C de $\mathfrak{p}$, y de una demostración, D, de $\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}$, nos proporcione una demostración de $\mathfrak{q}$; por la definición de la implicación, E consiste simplemente en la yuxtaposición de C y D; por ello, podrá aseverarse $\mathfrak{A}(p, q)$.

En 2.2.2 he dado un criterio relativo a las proposiciones matemáticas, a saber, el de que todas ellas tienen la forma "He efectuado una construcción con las siguientes propiedades: ....."; pues bien, las cuatro conectivas lógicas conservan esta forma. Es necesario, por otra parte, entender la palabra "construcción" en un sentido amplio, de manera que pueda denotar asimismo un método general de construcción, según indicábamos en el penúltimo párrafo; si así se hace (y así lo haré), toda fórmula lógica, expresa una proposición matemática.

7.1.2 *Teoremas del cálculo proposicional*

En las fórmulas empleo puntos y paréntesis del modo que es usual adoptando la convención de que $\to$ une menos fuertemente que $\wedge$ y que $\vee$. Las fórmulas aseveradas se marcarán con $\vdash$.

Aunque las principales diferencias entre la lógica clásica y la intuicionista residen en las propiedades de la negación, no coinciden completamente en sus respectivas fórmulas carentes de negaciones: $p \to q \cdot \vee \cdot q \to p$ es una fórmula válida en la lógica clásica, pero no se la puede aseverar en la intuicionista, como es claro teniendo en cuenta las definiciones dadas.

En la teoría de la negación falla el principio del tercio excluso, ya que $p \vee \neg p$ exige un método general de resolver todo problema, o sea —dicho más explícitamente—, un método general que para toda proposición, $\mathfrak{p}$, nos proporcione, por especialización, o bien una demostración de $\mathfrak{p}$ o una de $\neg\mathfrak{p}$; pero como no poseemos semejante método de construcción, no tenemos derecho a aseverar tal principio.

Este se presenta de otra forma así: $\neg\neg p \to p$; y ya nos hemos encontrado con muchos ejemplos de proposiciones para las que falla (el primero fue el de "ϱ es racional", en 2.2.2). Sin embargo,

$$(1) \qquad \vdash p \to \neg\neg p,$$

pues es evidente que de $\mathfrak{p}$ se sigue que es imposible que $\mathfrak{p}$ sea imposible. Les dejo a Vds. la tarea de caracterizar completamente el método de construcción que exige (1), de acuerdo con las definiciones de $\to$ y $\neg$.

Otra importante fórmula es

(2) $$\vdash p \to q \cdot \to \cdot \neg q \to \neg p;$$

desde luego, la fórmula inversa, $\neg q \to \neg p \cdot \to \cdot p \to q$, no puede aseverarse. (Háganse $\mathfrak{q} \equiv a \neq b$ y $\mathfrak{p} \equiv a \neq b$, siendo a y b números reales).

Aplicando dos veces (2) encontramos

(3) $$\vdash p \to q \cdot \to \cdot \neg\neg p \to \neg\neg q,$$

y por sustitución en (1) llegamos a

(4) $$\vdash \neg p \to \neg\neg\neg p;$$

finalmente, si sustituimos en (2) q por $\neg\neg p$ y utilizamos (1), obtenemos

(5) $$\vdash \neg\neg\neg p \to \neg p.$$

(4) y (5) muestran que no necesitamos nunca atender a más de dos negaciones consecutivas.

En virtud de (2), de $\vdash p \to p \vee q$ se sigue $\vdash \neg (p \vee q) \to \neg p$; y de la misma manera encontramos $\vdash \neg (p \vee q) \to \neg q$, por lo cual

(6) $$\vdash \neg (p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q;$$

en cuanto a la fórmula inversa, se ve fácilmente que también es verdadera:

(7) $$\vdash \neg p \wedge \neg q \to \neg (p \vee q).$$

(6) y (7) forman una de las equivalencias de De Morgan; de la otra sólo es verdadera una mitad:

(8) $$\vdash \neg p \vee \neg q \to \neg (p \wedge q).$$

En efecto, no es posible aseverar $\neg (p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$ según muestra el siguiente ejemplo: hagamos que $\mathfrak{p}$ sea $a \neq 0$, y que $\mathfrak{q}$ sea $b \neq 0$, siendo a y b números racionales; entonces, $\neg \mathfrak{p}$ será $a = 0$, y $\neg \mathfrak{q}$ será $b = 0$; ahora bien, he demostrado en 2.2.5 que $ab \neq 0$ equivale a $\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}$, luego $ab \neq 0$ equivale a $\neg (\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q})$; pero inmediatamente antes del lugar citado en 2.2.5 daba un ejemplo de números reales, a y b, para los que se tenía $ab = 0$, aunque sin que se supiése que $a = 0$ ni que $b = 0$.

(9) $$\vdash \neg\neg (p \vee \neg p),$$

ya que $\neg (\mathfrak{p} \vee \neg \mathfrak{p})$ implicaría, en virtud de (6), $\neg \mathfrak{p} \wedge \neg\neg \mathfrak{p}$, que

es una contradicción. Mediante (2) y (6), se obtienen sucesivamente, a partir de (8),

$$\vdash \neg\neg (p \wedge q) \rightarrow \neg (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg\neg p \wedge \neg\neg q$$

y

(10) $\vdash \neg\neg (p \wedge q) \rightarrow \neg\neg p \wedge \neg\neg q.$

La fórmula inversa de esta última es también verdadera:

(11) $\vdash \neg\neg p \wedge \neg\neg q \rightarrow \neg\neg (p \wedge q)$;

en efecto, la anterior interpretación de las conectivas lógicas hace ver claramente que $\vdash \neg (p \wedge q) \wedge p \rightarrow \neg q$, luego también $\vdash \neg (p \wedge q) \wedge \neg\neg q \rightarrow \neg p$; por consiguiente, si se da $\neg\neg \mathfrak{p} \wedge \neg\neg \mathfrak{q}$, la hipótesis $\neg (\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q})$ llevará a $\neg \mathfrak{p}$, que contradice la fórmula dada, $\neg\neg \mathfrak{p}$.

Es fácil ver que

(12) $\vdash \neg\neg p \vee \neg\neg q \rightarrow \neg\neg (p \vee q),$

pero la implicación inversa no se cumple, debido a nuestra "fuerte" interpretación de $\neg$.(6)

7.1.3 *Un sistema formal*

El cálculo de proposiciones intuicionistas ha podido ser presentado [A. Heyting 1930] en forma de sistema formal, empleando como constantes no definidas $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\neg$ y basándose en los axiomas que siguen:

I. $\vdash p \rightarrow (p \wedge p).$

II. $\vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p).$

III. $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)).$

IV. $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r).$

V. $\vdash q \rightarrow (p \rightarrow q).$

VI. $\vdash (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q.$

VII. $\vdash p \rightarrow (p \vee q).$

VIII. $\vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p).$

IX. $\vdash ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r).$

X. $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q).$

XI. $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow \neg p.$

En cuanto a las reglas de deducción, son las corrientes del cálculo proposicional clásico.

Tal vez el axioma X no parezca intuitivamente claro; sin embargo, en realidad contribuye a precisar la definición de la implicación. Se recordará que es posible aseverar $\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}$ si y sólo si se posee una construcción que, añadida a la construcción $\mathfrak{p}$, demuestre $\mathfrak{q}$; supongamos ahora que $\vdash \neg \mathfrak{p}$, esto es, que hayamos deducido una contradicción de la suposición de haberse llevado a cabo $\mathfrak{p}$; entonces, en cierto sentido cabe considerar tal cosa como una construcción que, unida a la demostración de $\mathfrak{p}$ (que no puede existir) llevaría a una demostración de $\mathfrak{q}$. Y voy a interpretar la implicación en este sentido, relativamente amplio.

Con su "cálculo mínimo" [I. Johansson 1936], Johansson ha presentado un sistema de lógica intuicionista en el que se interpreta $\to$ en sentido restringido, y en el que, por consiguiente, se rechaza X.

Es preciso recordar que no puede demostrarse que sistema formal alguno represente adecuadamente una teoría intuicionista: siempre restará un residuo de ambigüedad en la interpretación de los signos, y no es posible demostrar con rigor matemático que el sistema de axiomas que sea abarque realmente todo método válido de demostración.

7.2. Cálculo de predicados de primer orden

7.2.1. *La interpretación de los cuantificadores*

Sea $\mathfrak{p}(x)$ un predicado de una variable, x, que recorra una especie matemática dada, Q; entonces, $\vdash (\forall x)\mathfrak{p}(x)$ significará que $\mathfrak{p}(x)$ es verdadera para todo x de Q; dicho de otro modo, que tenemos un método general de construcción que, elegido un elemento cualquiera a, de Q, proporciona, por especialización, la construcción $\mathfrak{p}(a)$. En el caso de que Q sea una especie de despliegue, hemos de ser capaces de efectuar la construcción $\mathfrak{p}(x)$ para toda spi de Q; y en la demostración del teorema del abanico vimos que ésta es una interpretación muy fuerte del cuantificador generalizante. También interpretaremos el cuantificador existencial de forma harto fuerte: $(\exists x)\mathfrak{p}(x)$ será verdadera si y sólo si de hecho se ha construido un elemento, a, de Q para el que $\mathfrak{p}(a)$ sea verdadera.

La introducción de predicados con más de un argumento no ofrece ninguna dificultad; y será posible aseverar una fórmula del cálculo de predicados de primer orden en la que haya variables proposicionales y predicativas si es verdadera para toda sustitución de las correspondientes variables por proposiciones y predicados, respectivamente. Puede obtenerse una formalización sencilla del cálculo de predicados intuicionista adjuntando al cálculo proposicional intuicionista los símbolos, axiomas y reglas del cálculo de predicados usual, tal y como lo formulan Hilbert y Ackermann [D. Hilbert y W. Ackermann 1949, p. 59]; véase también [A. Heyting 1946]; pero no voy a desarrollar este sistema formal, sino que, en

lugar de ello, demostraré algunas fórmulas valiéndome de métodos intuitivos.

7.2.2. *Teoremas del cálculo de predicados*

Los teoremas que siguen son manifiestos:

(1) $\vdash (\forall x)p(x) \to \neg\, (\exists x) \neg\, p(x)$;

(2) $\vdash (\exists x)p(x) \to \neg\, (\forall x) \neg\, p(x)$;

en cambio, las implicaciones inversas no se cumplen; contraejemplos:

(i) hagamos que x recorra los números reales y que $\mathfrak{p}(x)$ sea "x es racional o x es irracional";

(ii) hagamos que x recorra los números racionales y que $\mathfrak{p}(x)$ sea "x es igual al número real ϱ que habíamos definido en 2.2.2.".

(3) $\vdash (\forall x) \neg\, p(x) \to \neg\, (\exists x)p(x)$.

(4) $\vdash \neg\, (\exists x)p(x) \to (\forall x) \neg\, p(x)$.

(5) $\vdash (\exists x) \neg\, p(x) \to \neg\, (\forall x)p(x)$.

La implicación inversa de (5) no se cumple, como muestra el siguiente contraejemplo:

Hagamos que x recorra los números racionales y que $\mathfrak{p}(x)$ sea "x no es igual al número real ϱ definido en 2.2.2.".

Por sustitución en (3) obtenemos

(6) $\vdash (\forall x) \neg\neg\, p(x) \to \neg\, (\exists x) \neg\, p(x)$,

mientras que la sustitución en (4) nos da

(7) $\vdash \neg\, (\exists x) \neg\, p(x) \to (\forall x) \neg\neg\, p(x)$.

Apliquemos las fórmulas del cálculo proposicional de 7.1.2; (3), (5) y (6) del presente apartado nos permiten obtener

(8) $\vdash \neg\neg\, (\forall x) \neg\neg\, p(x) \to \neg\, (\exists x) \neg\, p(x)$,

que es posible debilitar a

(9) $\vdash \neg\neg\, (\forall x)p(x) \to \neg\, (\exists x) \neg\, p(x)$;

y (9) y (7) nos proporcionan el importante resultado

(10) $\vdash \neg\neg\, (\forall x)p(x) \to (\forall x) \neg\neg\, p(x)$.

Uno de los rasgos más sorprendentes de la lógica intuicionista es que no se cumpla la implicación inversa de esta última: espe-

cialmente sorprendente debido a que la fórmula del cálculo proposicional que se obtiene si restringimos x a un conjunto finito es verdadera; de hecho, si x toma solamente dos valores, se llega a 7.1.2, (11). Brouwer [L.E.J. Brouwer 1924, p. 256; A. Heyting 1930A, p. 65; S.C. Kleene 1952, p. 491] ha presentado el siguiente contraejemplo:

Se define una expansión, M, mediante la ley de expansión Λ_M y la ley complementaria Γ_M:

Λ_M : el primer componente de una sucesión admisible puede ser 0 ó 1; $a_1, \ldots, a_n$ es una sucesión admisible y $a_n = 0$, puede ser a_{n+1} lo mismo 0 que 1; si $a_n = 1$, será $a_{n+1} = 1$.

Γ_M asigna a_n a la sucesión admisible $a_1, \ldots, a_n$.

Dicho sencillamente, M consta de todas las ssppii en las que los componentes sólo pueden ser 0 ó 1, pudiendo seguir a un 1 solamente otro 1.

La siguiente ley, Ξ, asigna números a ciertos elementos de M: Ξ: la sucesión todos cuyos componentes son 0 tiene el número 1; la sucesión todos cuyos componentes son 1 tiene el número 2; y la sucesión formada por n componentes 0 seguidos de componentes 1 tiene el número $n + 2$.

Hagamos que x recorra los elementos de M y que $\mathfrak{p}(x)$ sea "Ξ asigna un número a x"; entonces, $(\forall x) \neg\neg\, \mathfrak{p}(x)$ es verdadera. Voy a demostrar la proposición $\neg\, (\exists x) \neg\, \mathfrak{p}(x)$, que es equivalente a la anterior, deduciendo una contradicción del supuesto de que Ξ no asigne número alguno a cierto elemento, a, de M: bajo este supuesto, el primer componente de a no puede ser 1, porque entonces $\Xi(a)$ sería 2, luego tendrá que ser 0; el segundo componente no puede ser 1, ya que entonces $\Xi(a)$ sería 3, de modo que será 0; continuando de este modo veremos que todo componente de a es 0; de donde se sigue que $\Xi(a) = 1$, resultado que contradice la suposición de partida. Con todo, no se cumple $\neg\neg\, (\forall x)\mathfrak{p}(x)$ e incluso podemos demostrar que $\neg\, (\forall x)\mathfrak{p}(x)$: suponiendo que $(\forall x)\mathfrak{p}(x)$, el teorema del abanico nos autoriza a inferir que habrá de conocerse $\Xi(x)$ tras haberse dado un número finito, N, de componentes de x; pero es manifiesto que ello contradice la definición de Ξ.

CLAS. Este es el primer caso de un teorema clásico que intuicionísticamente no solamente no es demostrable, sino incluso falso.

IN. Desde luego, esta discrepancia proviene de la introducción de las ssppii: en particular, el cuantificador generalizante tiene un significado completamente distinto cuando se lo aplica a ssppii.

Se ha conjeturado [S. Kuroda 1951, p. 46] que la fórmula $(\forall x) \neg\neg\, p(x) \rightarrow \neg\neg\, (\forall x)p(x)$ es siempre verdadera si x recorre una especie infinita numerable. En todos los contraejemplos que se han presentado, x recorre una especie que no es infinita numerable (así sucede con el M a que acabamos de referirnos, ¡aunque es numerable desde un punto de vista clásico!), pero actualmente no tenemos a la vista ninguna forma de demostrar esta conjetura.

A partir de (3) y (4) inferimos, aplicando 7.1.2, (2),

(11) $\vdash \neg\neg\,(\exists x)p(x) \rightarrow \neg\,(\forall x)\neg\,p(x)$;

y

(12) $\vdash \neg\,(\forall x)\neg\,p(x) \rightarrow \neg\neg\,(\exists x)p(x)$;

substituyendo en (5) tenemos

(13) $\vdash (\exists x)\neg\neg\,p(x) \rightarrow \neg\,(\forall x)\neg\,p(x)$;

y a partir de (13) y (12) se obtiene

(14) $\vdash (\exists x)\neg\neg\,p(x) \rightarrow \neg\neg\,(\exists x)p(x)$.

Tampoco se cumple la implicación inversa de esta última, pero se trata de un hecho menos sorprendente que en el caso de (10), ya que la fórmula correspondiente del cálculo proposicional, que sería $\neg\neg\,(p \vee q) \rightarrow \neg\neg\,p \vee \neg\neg\,q$, tampoco es demostrable.

7.3. Aplicaciones

En algunos casos es posible desarrollar una teoría negativa paralelamente a otra positiva: en esta última se define cada concepto mediante una definición positiva, y en aquélla se introducen algunos conceptos valiéndose de definiciones negativas, en las que entran dobles negaciones, pero de tal modo que las definiciones que se den en las dos teorías de conceptos correspondientes sean equivalentes clásicamente.

7.3.1. *Las relaciones de orden en el continuo*

Definición 1. Si E es una especie matemática y $<$ es un predicado, definido en una subespecie de $E \times E$, que satisfaga las reglas (1) a (4) que damos más abajo, $<$ es una *relación de orden parcial* en E, y E está *parcialmente ordenada* por $<$. ($a > b$ significa lo mismo que $b < a$).

(1) $a<b \rightarrow \neg\,(a>b) \wedge \neg\,(a=b)$.

(2) $a=b \wedge b<c \rightarrow a<c$.

(3) $a<b \wedge b=c \rightarrow a<c$.

(4) $a<b \wedge b<c \rightarrow a<c$.

Definición 2. Una relación de orden parcial en una especie, E, es una *relación de orden* en E, y E está *ordenada* por ella, si satisface la regla (5a).

(5a) $a=b \vee a<b \vee a>b$.

La relación $<$ entre números naturales o entre número racionales es una relación de orden. En cambio, la relación $<$ entre números reales, tal como la definíamos en 2.2.6, referido a 3.3, no es una relación de orden (lo cual se sigue inmediatamente de 3.4.3, Teor. 2): en lugar de (5a) satisface (5b) y (6), que son ambas consecuencias de (1) a (4) y (5a).

(5b) $\neg (a>b) \wedge \neg (a<b) \rightarrow a=b$ (Compárese con 2.2.6, Teor. 3.)

(6) $a<b \rightarrow (\forall c)(a<c \vee c<b)$ (Compárese con 2.2.6, Teor. 4.)

Definición 3. Una relación de orden parcial en una especie, E, es una *relación de pseudo orden* y E está *pseudo ordenada* por ella si satisface las reglas (5b) y (6). (Adviértase que (2) y (3) se siguen de (1) y (6).)

A partir de ahora, $<$ denotará siempre una relación de pseudo orden en un género, E.

Definición 4. $a \not< b$ significa que $\neg (a>b) \wedge \neg (a=b)$.

Teorema 1. $\neg (a \not< b)$ equivale a $\neg (a<b)$.

Demostración. En virtud de (1), $a<b \rightarrow a \not< b$, de modo que $\neg (a \not< b) \rightarrow \neg (a<b)$ (véase 7.1.2, (2)). Para demostrar la implicación conversa, observemos que $a \not< b \wedge \neg (a<b)$ significa lo mismo que $\neg (a>b) \wedge \neg (a<b) \wedge \neg (a=b)$, cosa que está en contradicción con (5b); luego $a \not< b \wedge \neg (a<b)$ es imposible, y, en consecuencia, tenemos $\neg (a<b) \rightarrow \neg (a \not< b)$.

Teorema 2. $a \not< b$ equivale a $\neg\neg (a<b)$.

Demostración. Por la Def. 4 y 7.1.2, (6) y (7), $a \not< b$ equivale a
$\neg (a>b \vee a=b)$, luego
$\neg\neg (a \not< b) \rightarrow a \not< b$ (por 7.1.2, (5)); además,
$\neg (a \not< b) \rightarrow \neg (a<b)$ en virtud del Teor. 1, de modo que
$\neg\neg (a<b) \rightarrow \neg\neg (a \not< b)$ (por 7.1.2., (2)), y también $\rightarrow a \not< b$;
$\neg (a<b) \rightarrow \neg (a \not< b)$ por el Teor. 1, luego
$a \not< b \rightarrow \neg\neg (a<b)$ (por 7.1.2, (1) y (2)).

Teorema 3. La relación $\not<$ satisface (1) a (4) y (5b).

Demostración. (1) se sigue de la Def. 4 y el Teor. 1.
(2): se obtiene a partir de (2) para $<$, en virtud de 7.1.2, (3), y el Teor. 2, del modo que sigue:

$$a=b \wedge \neg\neg (b<c) \rightarrow \neg\neg (a<c) \rightarrow a \not< c.$$

(3): análogamente.

(4): se obtiene a partir de (4) para $<$, en virtud de 7.1.2, (11) y (3), y del Teor. 2.
(5b): se sigue del Teor. 1 y de (5b) para $<$.

En el caso del continuo, $\dot{<}$ no satisface (6) (véase 8.1.1), sino (5c)

(5c) $$\neg\,(a \dot{<} b) \wedge \neg\,(a=b) \rightarrow a \dot{>} b.$$

Teorema 4. Si $<$ es una relación de pseudo orden en una especie, E, la relación $\dot{<}$ correspondiente a ella por la Def. 4 satisface (5c).

Demostración. Inmediata a partir del Teor. 1 y de la Def. 4.

Definición 5. Una relación de orden parcial en una especie, E, que satisfaga (1) a (4), (5b) y (5c) es una *relación de orden virtual* en E, y E está *virtualmente ordenada* por ella [L.E.J. Brouwer 1925A, p. 453].

Los teoremas 3 y 4 pueden ahora expresarse del modo que sigue: si $<$ es una relación de pseudo orden en una especie, E, se tiene que $\dot{<}$, tal y como está definida por la Def. 4, es una relación de orden virtual en E.

Observación sobre la notación. La notación que empleo es distinta de la de Brouwer; y doy a continuación un pequeño diccionario:

en el presente libro:	$<$	$\not<$	$\leqq$
en Brouwer:	$<_0$	$\geqslant$	$<$

La razón de haber cambiado la notación ha sido que en el análisis la relación de pseudo orden entre números reales es la más importante, y, por lo tanto, debería denotarse con el signo más sencillo. Asimismo ocurre que en la notación de Brouwer existe el peligro de que se confundan $a \geqslant b$ y $(a>b \vee a=b)$; yo empleo $a \geqq b$ en este último sentido.

De acuerdo con la Def. 5, las reglas que cumplen las relaciones de orden virtual son:

(1) $$a \dot{<} b \rightarrow \neg\,(a \dot{>} b) \wedge \neg\,(a=b).$$

(2) $$a=b \wedge b \dot{<} c \rightarrow a \dot{<} c.$$

(3) $$a \dot{<} b \wedge b=c \rightarrow a \dot{<} c.$$

(4) $$a \dot{<} b \wedge b \dot{<} c \rightarrow a \dot{<} c.$$

(5b) $$\neg\,(a \dot{<} b) \wedge \neg\,(a \dot{>} b) \rightarrow a=b.$$

(5c) $$\neg\,(a \dot{<} b) \wedge \neg\,(a=b) \rightarrow a \dot{>} b.$$

Teorema 5. Si $<$ es una relación de orden virtual en una especie, E, se tienen $\neg\neg\,(a \dot{<} b) \rightarrow a \dot{<} b$ y $\neg\neg\,(a=b) \rightarrow a=b$.

Demostración. En virtud de (1) y (5c), $a \dot{<} b$ equivale a $\neg\,(a \dot{>} b) \wedge \neg\,(a=b)$, lo cual, por 7.1.2, (6) y (7), es equivalente a

$\neg\,(a \succ b \vee a = b)$; luego teniendo en cuenta 7.1.2, (5),
$\neg\neg\,(a \prec b) \rightarrow a \prec b$.

A partir de (1) y de 7.1.2, (2) y (1), inferimos que $a = b \rightarrow \neg\,(a \prec b)$; y análogamente, $a = b \rightarrow \neg\,(a \succ b)$. Por lo tanto, usando (5b) y 7.1.2, (6) y (7), vemos que $a = b$ equivale a $\neg\,(a \prec b \vee a \succ b)$; cosa que demuestra que $\neg\neg\,(a = b) \rightarrow a = b$.

Definición 6. Sea $\dot{<}$ una relación de orden parcial en la especie E, y Γ la especie de las fórmulas, $a = b$ o $a \mathring{<} b$, que sean válidas para los elementos, a, b, de E. Llamamos *inextensible* a $\mathring{<}$ si posee las siguientes propiedades: siempre que ni $x, y \in E$ ni $\neg\,(x \mathring{<} y)$ puedan deducirse de Γ aplicando (1)–(4), se tendrá $x \mathring{<} y \in \Gamma$; y análogamente, siempre que ni $x, y \in E$ ni $\neg\,(x = y)$ puedan deducirse de Γ aplicando (1)–(4), se tendrá $x = y \in \Gamma$.

Teorema 6. Toda relación de orden virtual es inextensible [L.E.J. Brouwer 1927].

Demostración. Si $x \succ y \in \Gamma$, podrá deducirse $\neg\,(x \prec y)$ de Γ en virtud de (1), luego si no es posible deducir $\neg\,(x \prec y)$ de Γ valiéndose de (1)–(4) es que $\neg\,(x \succ y \in \Gamma)$; y análogamente, $\neg\,(x = y \in \Gamma)$. Luego, en virtud de (5c), $x \prec y \in \Gamma$.
La demostración para el caso de $=$ es análoga a ésta.

Teorema 7. Toda relación de orden parcial inextensible es una relación de orden virtual.
Para la demostración, véase Brouwer [L.E.J. Brouwer 1927].

7.3.2. *Teoría negativa de la convergencia*

Es posible formular como sigue 2.4, Def. 1:

La sucesión $\{a_n\}$ de números reales es positivamente convergente hacia el límite a si

(1) $$(\forall k)\,(\exists n)\,(\forall p)\,(|a - a_{n+p}| < 2^{-k});$$

elegiremos como definición negativa correspondiente la que sigue:

Definición 1. La sucesión $\{a_n\}$ es *negativamente convergente* hacia el límite a (o sea, $-\lim a_n = a$), si

(2) $$(\forall k)\,\neg\neg\,(\exists n)\,(\forall p)\,(|a - a_{n+p}| < 2^{-k})$$ [J.G. Dijkmann 1952];

el criterio general de convergencia debido a Cauchy es, en cambio,

(3) $$(\forall k)\,(\exists n)\,(\forall p)\,(|a_{n+p} - a_n| < 2^{-k}).$$

Definición 2. La sucesión $\{a_n\}$ es *no oscilante* si

(4) $\quad (\forall k) \neg\neg (\exists n) (\forall p) (|a_{n+p} - a_n| < 2^{-k})$.

Es perfectamente sabido que si una sucesión, $\{a_n\}$, satisface (3), puede encontrarse un número real, a, tal que (1) sea verdadera; pero la correspondiente relación no se cumple entre (4) y (2), cómo muestra el ejemplo (II).

Ejemplos. (I) $a_n = 1$ si el n-ésimo dígito tras la coma del desarrollo decimal de π es el 9 de la primera secuencia 0123456789 de dicho desarrollo (y vamos a llamar a semejante valor de n, en caso de que exista, el número de la sucesión); en caso contrario, $a_n = 0$. Con objeto de mostrar que esta sucesión satisface (2) con $a = 0$, haré observar primeramente que (2) equivale a

(5) $\quad \neg (\exists k) (\forall n) \neg (\forall p) (|a - a_{n+p}| < 2^{-k})$;

supóngase que hayamos encontrado un k_0 tal que

(α) $\quad (\forall n) \neg (\forall p) (|a_{n+p}| < 2^{-k_0})$,

y además, que en π aparezca la secuencia indicada, siendo s el número de la sucesión; entonces tendremos

(β) $\quad (\forall p) (a_{s+p} = 0)$, luego $(\forall p) (|a_{s+p}| < 2^{-k_0})$;

por lo tanto, (α) no puede ser verdadera. Hemos demostrado así lo siguiente: si (α) es verdadera, no puede aparecer en π la secuencia 0123456789; pero entonces, $(\forall n)$ $(a_n = 0)$, y (α) es falsa. Así pues, (α) nos ha llevado a una contradicción, y hemos demostrado (5). Con todo, es manifiesto que no podemos aseverar que la sucesión $\{a_n\}$ sea positivamente convergente.

(II) $a_n = 0$ si no aparece la secuencia 0123456789 en los primeros n dígitos tras la coma de π, y $a_n = 1$ si dicha secuencia aparece dentro de esos primeros n dígitos. Esta sucesión $\{a_n\}$ será no oscilante: la demostración es análoga a la anterior; sin embargo, no podemos aseverar que sea negativamente convergente, ya que no se sabe si, en caso de existir un límite, sería 0 ó 1.

Teorema 1. Toda sucesión negativamente convergente es no oscilante.

Demostración. Abreviemos

$(\exists n) (\forall p) (|a_{n+p} - a_n| < 2^{-k})$ mediante $\mathfrak{A}(k)$, y
$(\exists n) (\forall p) (|a_{n+p} - a| < 2^{-k})$ mediante $\mathfrak{B}(k, a)$;

entonces, $\mathfrak{B}(k+1, a) \rightarrow \mathfrak{A}(k)$, y tendremos sucesivamente:

$$\neg\neg\,\mathfrak{B}(k+1, a) \to \neg\neg\,\mathfrak{A}(k);$$
$$(\forall k)\,\neg\neg\,\mathfrak{B}(k, a) \to (\forall k)\,\neg\neg\,\mathfrak{A}(k), \text{y}$$
$$(\exists a)\,(\forall k)\,\neg\neg\,\mathfrak{B}(k, a) \to (\forall k)\,\neg\neg\,\mathfrak{A}(k),$$

lo cual demuestra el teorema.

Teorema 2. Si $-\text{lím}\, a_n = a$ y $-\text{lím}\ b_n = b$, se tiene $-\text{lím}\ (a_n + b_n) = a + b$.

Demostración. Hagamos $a_n + b_n = c_n$, y $a + b = c$. Además abreviemos

$$(\exists n)\,(\forall p)\,(|a_{n+p} - a| < 2^{-k}) \text{ mediante } \mathfrak{A}(k),$$
$$(\exists n)\,(\forall p)\,(|b_{n+p} - b| < 2^{-k}) \text{ mediante } \mathfrak{B}(k), \text{ y}$$
$$(\exists n)\,(\forall p)\,(|c_{n+p} - c| < 2^{-k}) \text{ mediante } \mathfrak{C}(k);$$

entonces, $\mathfrak{A}(k) \wedge \mathfrak{B}(k) \to \mathfrak{C}(k)$, luego $\neg\neg\,\mathfrak{A}(k) \wedge \neg\neg\,\mathfrak{B}(k) \to \neg\neg\,\mathfrak{C}(k)$ (por aplicación de 7.12, (11) y (3)); finalmente,

$$(\forall k)\,\neg\neg\,\mathfrak{A}(k) \wedge (\forall k)\,\neg\neg\,\mathfrak{B}(k) \to (\forall k)\,\neg\neg\,\mathfrak{C}(k),$$

lo cual demuestra el teorema.

Teorema 3. Si $-\text{lím}\, a_n = a$ y $-\text{lím}\, a_n = b$, se tiene $a = b$.

Demostración. De $-\text{lím}\, a_n = b$ se sigue que $-\text{lím}\, -a_n = -b$; de ahí que, en virtud del Teor. 2, $-\text{lím}\, c_n = a - b$, siendo todo $c_n = 0$. Entonces,

$$(\forall k)\,\neg\neg\,(\exists n)\,(\forall p)\,(|a-b| < 2^{-k}),$$
$$(\forall k)\,\neg\neg\,(|a-b| < 2^{-k}),$$
$$(\forall k)\,(|a-b| < 2^{-k}) \text{ y}$$
$$a = b.$$

El teorema que sigue carece de paralelo en la teoría positiva.

Teorema 4. Toda sucesión monótona acotada de números reales es no oscilante.

Demostración. Para la sucesión $\{a_n\}$, tenemos, por hipótesis,

(1) $\qquad (\forall n)\,(a_n < M)$ y

(2) $\qquad (\forall n)\,(a_{n+1} \not< a_n)$,

y es preciso demostrar que

(X) $\qquad (\forall k)\,\neg\neg\,(\exists n)\,(\forall p)\,(a_{n+p} - a_n < 2^{-k})$,

lo cual equivale a

(Y) $\quad \neg(\exists k)(\forall n)\neg(\forall p)(a_{n+p}-a_n<2^{-k})$.

Supóngase que hemos encontrado un número, k_1, tal que

(5) $\quad (\forall n)\neg(\forall p)(a_{n+p}-a_n<2^{-k_1-1})$;

bastará con deducir una contradicción de (1), (2) y (5). Ahora bien, de $\neg(\exists p)(a_{n+p}-a_n>2^{-k_1-1})$ se sigue que $(\forall p)(a_{n+p}-a_n<2^{-k_1})$, por lo cual se sigue de (5) que

(6) $\quad (\forall n)\neg\neg(\exists p)(a_{n+p}-a_n>2^{-k_1-1})$,

y el teorema quedará demostrado si deducimos una contradicción de (1), (2) y (6).

Como caso especial de (6) tenemos

(7) $\quad \neg\neg(\exists p)(a_p-a_1>2^{-k_1-1})$.

Supongamos que hemos encontrado un número, p_1, tal que $a_{p_1}-a_1>2^{-k_1-1}$; entonces, en virtud de (6), $\neg\neg(\exists r)(a_r-a_{p_1}>2^{-k_1-1})$, y además, $\neg\neg(\exists r)(a_r-a_1>2.2^{-k_1-1})$; con lo cual hemos demostrado, a partir de (1), (2) y (6), lo siguiente:

(8) $\quad (\exists p)(a_p-a_1>2^{-k_1-1})\rightarrow\neg\neg(\exists r)(a_r-a_1>2.2^{-k_1-1})$.

Valiéndonos del cálculo proposicional (7.2.1, (3), (4) y (2)), inferimos a partir de (7) y (8) que

(9) $\quad \neg\neg(\exists r)(a_r-a_1>2.2^{-k_1-1})$,

y repitiendo $h-1$ veces este razonamiento llegamos a

(10) $\quad \neg\neg(\exists s)(a_s-a_1>h.2^{-k_1-1})$;

hagamos ahora $h=\left[\frac{M-a_1}{2^{-k_1-1}}\right]+1$; entonces obtenemos

(11) $\quad \neg\neg(\exists s)(a_s>M)$,

que está en contradicción con (1).

Observación. Fácilmente se advierte que, en lugar de (1), basta la hipótesis $\neg\neg(\exists M)(\forall n)(a_n<M)$.

7.3.3. *La interpretación negativa del análisis clásico*

Gödel [K. Gödel 1932] fue quien primero demostró que es posible desarrollar el cálculo clásico de proposiciones y la aritmética clásica como parte de los sistemas intuicionistas correspondientes; mas para asentar tales teoremas es necesario antes formalizar la parte pertinente de las matemáticas intuicionistas, y las observaciones que antes he hecho acerca del cálculo de proposiciones intuicionista son también aplicables a todo sistema formal que se construya con intención de representar una teoría matemática intuicionista, sea la que sea: nunca podrá demostrarse rigurosamente que semejante sistema es adecuado. Sin embargo, se han construido sistemas formales para el cálculo proposicional, para el de predicados y para la aritmética elemental tales que toda fórmula demostrable en uno de esos sistemas, debidamente interpretada, exprese un teorema de la matemática intuicionista; en el libro de Kleene [S.C. Kleene 1952, p. 492] se describen pormenorizadamente tales sistemas: este autor los presenta de forma que al añadir a cada uno de ellos el axioma $\neg\neg p \rightarrow p$ se obtenga el sistema clásico correspondiente.

Kleene demuestra varias ampliaciones del teorema de Gödel, de entre las cuales mencionaré los teoremas 1, 2 y 3 que siguen.

Definición 1. $p + q$ significa $\neg(\neg p \wedge \neg q)$;
$p \supset q$ significa $\neg(p \wedge \neg q)$;
$(\forall x)p(x)$ significa $\neg(\forall x)\neg p(x)$;

y en virtud de 7.3.1, (3) y (4), esto último equivale a $\neg\neg(\exists x)p(x)$.

Teorema 1. Para el cálculo proposicional en el que $\wedge$ sea la conyunción, $+$ la adyunción, $\supset$ la implicación y $\neg$ la negación, toda fórmula demostrable clásicamente es verdadera intuicionísticamente.

Teorema 2. Para el sistema formal de la teoría de números (aritmética elemental) en el que $\wedge$ sea la conyunción, $+$ la adyunción, $\supset$ o $\rightarrow$ la implicación, $\neg$ la negación y $(\forall)$ el cuantificador existencial, toda fórmula demostrable clásicamente es verdadera intuicionísticamente.

Teorema 3. Para el cálculo de predicados en el que $\wedge$ sea la conyunción, $+$ la adyunción, $\supset$ o $\rightarrow$ la implicación, $\neg$ la negación y $(\forall)$ el cuantificador existencial, toda fórmula demostrable clásicamente, se convierte en intuicionísticamente verdadera tras reemplazar toda fórmula primaria, $\mathfrak{p}$, que aparezca en ella por $\neg\neg\mathfrak{p}$.

Observación. La transformación de $\mathfrak{p}$ en $\neg\neg\mathfrak{p}$ es innecesaria en el cálculo proposicional [ya que $\neg\neg\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}$, que es $\neg(\neg\neg\mathfrak{p} \wedge \neg\mathfrak{p})$, es verdadera, así como en el sistema de la teoría de números, puesto

que las fórmulas primarias tienen la forma $a = b$ o $a > b$, siendo a y b números naturales, de modo que $\neg\neg(a=b) \rightarrow a=b$ y $\neg\neg(a>b) \rightarrow a>b$ son verdaderas.

Estos teoremas incluyen las demostraciones de coherencia [*consistency*] de los sistemas clásicos con respecto a los correspondientes sistemas intuicionistas.

Voy a aplicar dicho teoremas a la aritmética de los números reales. Los generadores de número se definían como sucesiones de Cauchy de números racionales; ahora, para aplicar el Teor. 2, es preciso sustituir $(\exists x)$ por $(\forall x)$ en la definición de las sucesiones de Cauchy, con lo que obtendremos la definición de sucesión no oscilante.

Definición 2. Un *generador débil de número real* es una sucesión no oscilante de números racionales.

La definición de coincidencia entre generadores de número real era la siguiente: si $a=\{a_n\}$ y $b=\{b_n\}$, $a = b$ significa que

$$(\forall k)\,(\exists n)\,(\forall p)\,(|a_{n+p}-b_{n+p}|<2^{-k}).$$

Definición 3. Los generadores de número reales $a=\{a_n\}$ y $b=\{b_n\}$ *coinciden en sentido débil* $(a \doteq b)$ si

$$(\forall k)\,(\forall n)\,(\forall p)\,(|a_{n+p}-b_{n+p}|<2^{-k}).$$

Definición 4. Llamamos *número real débil* a la especie de los generadores débiles de número que coincidan en sentido débil con un generador débil de número ya dado.

La definición de la relación de orden entre generadores de número real era como sigue: $a > b$ significa que

$$(\exists k)\,(\exists n)\,(\forall p)\,(a_{n+p}-b_{n+p}>2^{-k}).$$

Definición 5. Para generadores débiles de número $a=\{a_n\}$ y $b=\{b_n\}$, *a es débilmente mayor que b* $(a \dot{>} b)$ significa que

$$(\forall k)\,(\forall n)\,(\forall p)\,(a_{n+p}-b_{n+p}>2^{-k});$$

esto equivale a la doble negación de $a > b$, ya que a partir de 7.2.2, (11) y (12), podemos inferir fácilmente que $\neg\neg(\exists x)p(x)$ es equivalente a $\neg\neg(\exists x)\neg\neg p(x)$.

Como corolario del Teor. 2 tenemos el

Teorema 4. Sea S el sistema que se obtiene añadiendo al sistema formal de la teoría de números variables libres para números reales y las relaciones $=$ y $>$ para números reales; sea T un teorema de la aritmética clásica que pueda formalizarse en S, y T' el teorema que se obtenga cuando en T se sustituyan $\wedge$ por $+$, $(\exists x)$ por $(\forall x)$, las variables para números reales por variables para números reales débiles, $=$ por $\doteq$ y $>$ por $\dot{>}$; entonces, T' será verdadero intuicionísticamente.

Con objeto de ampliar el teorema 4 al análisis será necesario ampliar el Teor. 2 o el 4 a un cálculo de predicados de orden superior, o a algún otro cálculo en el que sea posible formalizar las partes principales del análisis clásico. Es probable que por este método pueda deducirse una demostración de coherencia del análisis con respecto a las matemáticas intuicionistas.

VIII. TEMAS CONTROVERTIDOS

8.1. Las sucesiones prolongadas infinitamente que dependen de la solución de algún problema

8.1.1. *Método*

A partir de 1948 Brouwer ha publicado cierto número de trabajos, muchos de ellos en holandés [L.E.J. Brouwer 1948, p. 1246; 1948A; 1948B; 1949; 1949A; 1950; 1950A; 1951; 1952B; 1954B y 1954C], en los que presenta contraejemplos a teoremas clásicos; y todas sus ejemplificaciones se basan en un principio que señaló en su conferencia en el 10.º Congreso Internacional de Filosofía, celebrado en Amsterdam en 1948. Voy a empezar por hacerlo ver gráficamente mediante las definiciones que siguen.

Diremos de una proposición matemática, p, que se la ha *contrastado* si o bien se ha demostrado $\neg p$ o $\neg\neg p$. Sea p una proposición no contrastada (por ej., "en el desarrollo decimal de π aparece la secuencia 0123456789"); ahora voy a definir mediante una spi un generador de número real, $a = \{a_n\}$ como sigue: mientras no se haya contrastado p, elijo $a_n = 2^{-n}$, pero si p ha quedado contrastada entre la elección de a_m y la de a_{m+1}, elijo $a_{m+q} = 2^{-m}$ para todo q.

SIG. Eso no suena a una definición matemática: ¿puede considerarse bien definida matemáticamente una sucesión de números racionales si sus componentes dependen de hechos materiales, tales como la existencia en un momento dado de una demostración de cierta proposición?

IN. Estoy de acuerdo con esa objeción; y, en realidad, dudo que sea aconsejable adoptar como matemáticas semejantes definiciones. Como he recalcado antes, ninguna definición verbal puede carecer de toda ambigüedad; y ahora vemos que la definición de spi nos deja cierto margen de libertad, cierta holgura; en tales casos podemos decidir libremente la interpretación que vayamos a adoptar.

FOR. Como ha hecho observar van Dantzig [D. van Dantzig 1949], la definición de Brouwer y el razonamiento que se basa en ella pueden justificarse plenamente desde un punto de vista formal.

IN. Los métodos de van Dantzig, según indica él mismo, arrojan cierta luz sobre el tema tal y como lo ven los intuicionistas. Voy a tratar de caracterizar brevemente este punto de vista.

Hagamos que ω_i (siendo $i = 1, 2, \ldots$) denote, para todo i, un

conjunto finito de deducciones matemáticas; y denotaremos con Ω la sucesión $\{\omega_i\}$.

Sea $\sigma_n = \bigcup_{i=1}^{n} \omega_i$, y $\mathfrak{p}$ una proposición matemática. El generador de número real a depende de Ω, es decir $a(\Omega) = \{a_n(\Omega)\}$; si en σ_n no se encuentra incluida ninguna deducción ni de $\neg\,\mathfrak{p}$ ni de $\neg\neg\,\mathfrak{p}$, será $a_n(\Omega) = 2^{-n}$, y si σ_n contiene una deducción de $\neg\,\mathfrak{p}$ o de $\neg\neg\,\mathfrak{p}$, siendo además m el mínimo número tal que σ_m contenga una de estas deducciones, será $a_n(\Omega) = 2^{-m}$. De esta forma suena a matemática la definición de a; queda, sin embargo, la cuestión de si es adecuada para lo que se propone Brouwer.

Este quería mostrar que $a \neq 0$ no habiéndose demostrado que $a \# 0$ (se trata del ejemplo que habíamos prometido en 2.2.3). Supongamos, en efecto, que $a = 0$; entonces, ni $\neg\,\mathfrak{p}$ ni $\neg\neg\,\mathfrak{p}$ podrán demostrarse nunca, por lo cual tanto $\neg\neg\,\mathfrak{p}$ como $\neg\neg\neg\,\mathfrak{p}$ serían verdaderas, resultado que es contradictorio; por consiguiente, $a \neq 0$. Por otra parte, $a \# 0$ significaría que podríamos encontrar un número, q, tal que $a > 2^{-q}$, de donde se seguiría que $\mathfrak{p}$ estaría contrastada antes de haber elegido a_q; cosa que sólo podemos saber si se ha contrastado ya $\mathfrak{p}$. Adviértase que $a \# 0$ no es contradictorio, pues ello implicaría $a = 0$.

Evidentemente, Brouwer supone que no sabe de antemano qué deducciones se harán: si se promulga una ley en todo el mundo prohibiendo llevar a cabo, en absoluto, deducción matemática alguna, la demostración de $a \neq 0$ se malogra.

En la versión de van Dantzig se llega a lo siguiente: para un n dado, la aserción de que $a = 0$ cualesquiera que sea $\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \ldots$ es falsa; y si $a \# 0$, se conoce un número, q, tal que en σ_q aparece o una demostración de $\neg\,\mathfrak{p}$ o una de $\neg\neg\,\mathfrak{p}$.

SIG. Es decir, en la terminología de van Dantzig no tenemos ningún ejemplo de un número real, a, tal que $a \neq 0$ no habiéndose demostrado que $a \# 0$.

IN. Así es. Personalmente, yo prefiero la terminología de van Dantzig, que evita varias equivocidades de las palabras de Brouwer; aquel autor analiza con agudeza la definición de éste e introduce muchos perfilamientos, para los que les remito a su trabajo. En mi opinión, no importa mucho que expresmos este resultado con las palabras de Brouwer o con las de van Dantzig, con tal de que comprendamos lo que se quiere decir con él; ni tampoco importa mucho que lo llamemos resultado matemático o no: en cualquier caso hace ver que sería una insensatez buscar una demostración de la equivalencia de las relaciones $\neq$ y $\#$ entre números reales.

CLAS. Estoy convencido de ello desde 2.2.3.

IN. El ejemplo de Brouwer analiza una de las razones subconscientes que le han hecho sentir tal convicción.

Pero dicho ejemplo puede también utilizarse para hacer patente que el orden virtual del continuo no es un pseudo orden (cf. 7.3.1). Permítaseme repetir el ejemplo. Sea $\mathfrak{p}$ una proposición que no esté contrastada; defino un generador de número real $a = \{a_n\}$, mediante

una spi del modo que sigue: mientras no se haya contrastado $\mathfrak{p}$, elegiré $a_n = 2^{-n}$, pero si se contrasta $\mathfrak{p}$ entre la elección de a_m y la de a_{m+1}, elegiré $a_{m+q} = 2^{-m}$ para todo q. Ahora voy a definir $c = \{c_n\}$ de la siguiente forma: mientras no se haya contrastado $\mathfrak{p}$, elegiré $c_n = 2^{-n}$; pero si se la contrasta entre la elección de a_m y la de a_{m+1} *y m es par*, elegiré $c_{m+q} = 2^{-m}$ para todo q; mientras que si m es impar elegiré $c_r = 2^{-r}$ incluso para $r > m$.

Si $c \# 0$, se tiene que $c = a$; de ahí que, si $a > c$ sea c = 0; y si $c > 0$, se tiene $c \neq 0$. Por lo tanto, $a > c$ y $c > 0$ implicarían respectivamente $c = 0$ y $c \neq 0$, por lo cual implicarían asimismo, o bien que $\mathfrak{p}$ no quedara contrastada tras un número par de elecciones destinadas a a, o que es imposible que $\mathfrak{p}$ no quede contrastada tras un número par de elecciones destinadas a a. Pero mientras no se haya contrastado $\mathfrak{p}$ no podremos saber nada acerca del número de elecciones destinadas a a tras del cual quizá quede contrastada: aunque $a \succ 0$, no podremos aseverar ni que $a \succ c$ ni que $c \succ 0$, de modo que no se cumplirá la regla (6) de 7.3.1.

8.1.2. *La contradictoriedad de la aritmética clásica de los números reales*

A partir de ahora voy a emplear la terminología de Brouwer, que ha quedado ya lo suficientemente aclarada para que les permita a Vds. sustituirla por otra si prefieren hacerlo así.

Los teoremas de este apartado son más fuertes que los del anterior, en cuanto que expresan el carácter contradictorio de algunos resultados clásicos.

Teorema 1. Es contradictorio que para todo número real, a, $a \neq 0$ implique $a \# 0$.

Demostración. Sea $\bar{J}$ un despliegue finitario que coincida con el intervalo [0, 1] (3.4.1, Teor. 1). Vamos a definir simultáneamente un elemento, f, de J y un generador de número real, $a(f) = \{a_n(f)\}$, como sigue: si $f \in J$, sea $\mathfrak{p}(f)$ la proposición "f es racional"; para todo n, f_n se elegirá entre las elecciones respectivas de $a_n(f)$ y de $a_{n+1}(f)$; mientras no se haya contrastado $\mathfrak{p}(f)$, elegiremos $a_n(f) = 2^{-n}$, y si $\mathfrak{p}(f)$ queda contrastada entre la elección de a_m y la de a_{m+1}, elegiremos $a_{m+q} = 2^{-m}$ para todo q. Como sucedía en l ejemplo anterior, $a(f) \neq 0$ para todo f. Supongamos ahora que $a(f) \# 0$ para todo f; entonces, se conocerá para todo f un número natural, $r(f)$, tal que $\mathfrak{p}(f)$ esté contrastada antes de elegir $a_{r+1}(f)$, o sea, antes de elegir f_{r+1}. Por el teorema del abanico, podrá encontrarse un máximo, s, para $r(f)$, y, en consecuencia, $\mathfrak{p}(f)$ estará contrastada para todo f antes de elegir f_{s+1}. Hagamos ahora que f sea una spi que tras la elección de f_s no esté sometida a otras restricciones que las incluidas en la definición de J; entonces

seremos libres para continuar f de tal modo que se obtenga, o bien un númer oracional o uno irracional; luego es contradictorio que $\mathfrak{p}(f)$ esté contrastada antes de elegir f_{s+1}.

Así pues, $(\forall f)\,(a(f) \neq 0)$ y $\neg\,(\forall f)\,(a(f) \not\neq 0)$ son ambas verdaderas cuando f recorre J.

FOR. Evidentemente, en esta notación formal es preciso entender los cuantificadores en un sentido ampliado, que se corresponda con el ampliado concepto de Brouwer de spi.

IN. La demostración muestra también que es contradictorio que, para todo número real, a, $a \neq 0$ y $a \not< 0$ implique $a > 0$; o sea, con la terminología de 7.3.1, que $a \not> 0$ implique $a > 0$.

Con objeto de demostrar la contradictoriedad de la aritmética clásica elemental, Brouwer demuestra la siguiente ampliación del Teor. 1:

Teorema 2. Es contradictorio que, para todo número real, $a \neq 0$ implique $a \# 0 \vee a \# 0$.

Demostración. Como antes, supongamos que J sea un despliegue finitario que coincida con $[0, 1]$, f un elemento cualquiera de J, y $\mathfrak{p}(f)$ la proposición "f es racional". Ahora definiremos f y el generador de número real $b(f) = \{b_n(f)\}$ del modo siguiente: para todo n,, f_n se elegirá entre las elecciones de $b_n(f)$ y de $b_{n+1}(f)$; mientras no se haya contrastado $\mathfrak{p}(f)$, elegiremos $b_n(f) = (-1)^n.2^{-n}$; si entre la elección de $b_m(f)$ y la de $b_{m+1}(f)$ se demuestra que f es irracional, elegiremos $b_{m+q} = 2^{-m}$ para todo q, y si entre la elección de $b_m(f)$ y la de $b_{m+1}(f)$ se demuestra que f no puede ser irracional, elegiremos $b_{m+q}(f) = -2^{-m}$ para todo q. Como antes, $b(f) \neq 0$. Supóngase que, para todo f de J, o bien $b(f) \# 0$ o bien $b(f) \# 0$.

Si f es irracional, $b(f) > 0$, luego si $b(f) \# 0$ resulta que f no puede ser irracional.

Si f no puede ser irracional, $b(f) < 0$, luego si $b(f) \# 0$ resulta que f es irracional. (Hemos aplicado 7.1.2, (2) y (5).)

Así pues, $[0, 1]$ quedaría escindido en la subespecie de los números que no pueden ser irracionales y la subespecie de los números irracionales; lo cual contradice 3.4.3, Teor. 2.

Corolario. Es contradictorio que para todo número real, x, o bien $x \# 0$ ó $x \# 0$.

Teorema 3 Es contradictorio que la ecuación $ax + b = 0$, siendo $a \neq 0$ y $b \neq 0$, tenga siempre una solución.

Demostración. Sea c un número real, $c \neq 0$; hagamos $a = c + 2|c|$, y $b = c - 2.|c|$, con lo que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Sea x_1 una solución de $ax + b = 0$; si $c > 0$, será $a = -3b$, de modo que $b(3x_1 - 1) = 0$, con lo que $x_1 = 1/3$; si $c < 0$, será $b = -3a$, de modo que $a(x_1 - 3) = 0$, con lo que $x_1 = 3$ así pues, si $x_1 = 1/3$, será $c \# 0$, y si

$x_1 \neq 3$, será $c \not< 0$; y como o bien $x \neq 1/3$ ó $x \neq 3$, tendremos que o bien $c \not> 0$ ó $c \not< 0$. Por lo tanto, si $ax + b = 0$ tuviese una solución para todo $c \neq 0$, resultaría que $c \neq 0$, implicaría $c \not> 0$ ó $c \not< 0$, lo cual contradice el Teor. 2.

Corolario. En la geometría euclídea plana es contradictorio que dos rectas cualesquiera que no puedan coincidir ni ser paralelas se corten. Pues si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, y si d es un número real cualquiera $\# 0$, $ax + dy = b$ es la ecuación de una recta que no coincide con el eje de las x ni es paralelo a él; y si todas esas rectas cortaran al eje de las x, $ax = b$ sería siempre una solución supuesto que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

8.1.3. *Un ejemplo relativo al teorema de Bolzano-Weierstrass*

Una de las formas de este teorema, de que nos hemos ocupado en 3.4.4, rezaba como sigue:

(C) Toda especie acotada de números reales sin punto de acumulación, está acotada en número.

Sea $\mathfrak{p}$ una proposición que no se haya contrastado; vamos a formar una spi de números racionales, $\{b_n\}$, del modo siguiente: mientras no esté contrastada $\mathfrak{p}$, elegiremos $b_n = 2^{-n}$; y si $\mathfrak{p}$ resulta contrastada entre la elección de b_m y la de b_{m+1}, elegiremos $b_{m+p} = 2^{-m}$ para todo p. Sea E la especie de los componentes, b_n, de esta sucesión, y supongamos que c fuese un punto de acumulación de E; es evidente que $c \not< 0$; pero también habría de ser $c \not> 0$, ya que de $c > 0$ se seguiría que E sería finita; así pues, $c = 0$, pero esto implica que $\mathfrak{p}$ no podrá nunca contrastarse, lo cual es contradictorio. En consecuencia, E no puede tener ningún punto de acumulación. Por otra parte, si E estuviese acotada en número, se conocería un número natural, m, tal que $\mathfrak{p}$ estaría contrastada antes de elegir b_{m+1}, cosa que no ocurre. Por lo tanto, no podemos abrigar esperanza alguna de demostrar (C) intuicionísticamente.

8.2. La matemática sin negación

Griss [H. Freudenthal 1936A; A. Heyting 1936; G.F.C. Griss 1946, p. 24, p. 26 y p. 64, 1948 y 1948A] ha planteado graves objeciones contra el empleo de la negación en la matemática: aunque está completamente de acuerdo con las ideas básicas de Brouwer en cuanto a la naturaleza de las matemáticas, sostiene que todo concepto matemático se origina en una construcción matemática, una que pueda realmente llevarse a cabo; y si tal construcción es imposible, aquel concepto no puede estar claro.

Brouwer admite teoremas tales como "un círculo cuadrado no puede existir": podemos demostrar este teorema deduciendo una contradicción de que hayamos construido un cuadrado que fuese al mismo tiempo un círculo. Según Griss, semejante suposición carece

de sentido claro, ya que no puede realizársela; dicho de otro modo, si no existe ningún círculo cuadrado, ¿cómo podremos tener un concepto claro de cómo sería si existiese? En consecuencia, Griss rechaza la negación como concepto matemático.

En muchos casos, la demostración de un teorema negativo hace pensar en una forma positiva de efectuarla; por ejemplo, en la demostración de "no existe ningún círculo cuadrado" damos con una aserción del tipo de la siguiente:

"Si C es un cuadrado y P un punto cualquiera, podemos encontrar puntos, Q y R, en la frontera de C tales que $PQ \# PR$"; y, para Griss, esta positiva aserción expresa el auténtico contenido de aquel negativo teorema. Desde luego, en la mayoría de los casos un teorema negativo admite varias traducciones positivas; Griss ha tratado de reconstruir la matemática intuicionista sin emplear la negación, y ha logrado algunos resultados notables en tal dirección [G.F.C. Griss 1946A; 1950; 1951].

En la aritmética de los enteros y la de los números racionales no se emplea esencialmente la negación; en tales campos, $a \neq b$ es lo mismo que $a > b \vee a < b$, en donde no hay ninguna negación. El primer concepto negativo que ha aparecido en estas conferencias ha sido el de la desigualdad entre números reales, $a \neq b$; Griss no puede admitir que esta noción esté bien definida, y emplea en su lugar la relación $a \# b$, cuya definición es positiva. Sin embargo, entre las propiedades básicas de la relación $\#$ se encuentra la siguiente: $\neg\, a \not\# b \to a = b$; en vez de ella, Griss se vale del siguiente

Teorema. Si a y b son números reales tales que todo número real, c, que esté separado de a también lo estará de b, se tiene $a = b$.

No es fácil dar una demostración de este teorema que no haga uso de la negación; Griss sólo lo consigue aplicando el teorema del abanico.

Partamos de que a y b cumplan la hipótesis del teorema; podemos suponer que están respectivamente definidos por unos generadores canónicos de número $a = \{a_n 2^{-n}\}$ y $b = \{b_n 2^{-n}\}$, tales que $|a - a_n 2^{-n}| < 2^{-n}$ y $|b - b_n 2^{-n}| < 2^{-n}$. Para un valor dado de n, o bien $b_n < a_n$, o $b_n = a_n$, o $b_n > a_n$. Supongamos primero que $b_n > a_n$. Fijémonos en el intervalo $i = [(a_n - 1)2^{-n}, (b_n - 1)2^{-n}]$ y construyamos el despliegue finitario, D_i, que coincida con i, como hacíamos en 3.4.3, Teor. 1; hagamos que $c = \{c_n 2^{-n}\}$ sea un elemento de D_i; entonces, $c < b$, luego, por hipótesis, $c \# d$; esto quiere decir que

$$(\exists k)\ (\exists m)\ (\forall p)\ (|c_{m+p} - a_{m+p}| 2^{-m-p} > 2^{-k}),$$

luego, *a fortiori,*

$$(1) \qquad (\exists k)\ (|c_k - a_k| 2^{-k} > 2^{-k}).$$

Así pues, a cada elemento c de D, le está asociado un número

natural, k, tal que se satisfaga (1). Por el teorema del abanico podremos encontrar un r tal que se conozca k tras haber elegido los primeros r componentes de c; luego k no toma sino un número finito de valores, y podremos encontrar $k_0 = \max_{c \in E_i} k$, con lo que

$$|c_{k_0} - a_{k_0}| 2^{-k_0} > 2^{-k_0} \tag{2}$$

será válida para todo c de D_i, o sea, para todo punto reticular, $c_{k\,0}2^{-k}0$, de orden k_0 en i.

También tenemos $a_{k\,0}2^{-k}0 > (a_n -)2^{-n}$; además, por (2), $a_{k\,0}2^{-k}0$ es distinto de todo punto reticular de orden k_0 en i (para los números racionales, "distinto" es un concepto positivo), de modo que $a_{k\,0}2^{-k}0 > (b_n - 1)2^{-n}$; pero también $a_{k\,0}2^{-k}0 < (a_n + 1)2^{-n}$, por lo cual $b_n < a_n + 2$. Habíamos supuesto que $b_n > a_n$, por lo cual será $b_n = a_n + 1$; y análogamente, si fuese $b_n < a_n$, se tendría $b_n = a_n - 1$. Hemos demostrado, pues, que $|b_n - a_n| \leqq 1$ para todo n luego $b = a$.

En la teoría de los despliegues y las especies no se puede ahora definir la especie nula: toda especie se define por una propiedad de objetos matemáticos, como hemos explicado en 3.2.1, pero tal propiedad sólo puede tener un sentido claro tras haber construído un objeto que la cumpla; y, como consecuencia de este requisito, la intersección de dos especies sólo puede definirse si contiene al menos un elemento. Por ejemplo, podemos hablar de la especie de los campos algebraicos, y de la especie de las especies de seis elementos, pero no de su intersección. En cuanto a la relación de diferencia entre especies, se la define por inducción como sigue: dos especies son distintas si una de ellas contiene un elemento que sea distinto de todo elemento de la otra especie.

La lógica de la matemática sin negación es difícil de formalizar, por varias razones. En primer término, no existe cálculo de proposiciones, ya que solamente tienen sentido las proposiciones verdaderas; además, es preciso tener en cuenta la restricción que se impone al uso de la conyunción entre funciones proposicionales (especies). Griss [G.F.C. Griss 1949 y 1950A], Gilmore [P.C.G. Gilmore 1953], Vredenduin [P.G.C. Vredenduin 1953] y Valpola [V. Valpola 1955] han llevado a cabo intentos de tal formalización.

BIBLIOGRAFIA

En la presente bibliografía se encuentran:

1.º los trabajos a que se hace referencia en el texto [incluidos los indicados en nuestra 5, § 3.4.2, que no mencionaba el autor, y que están marcados con un asterisco, "*".(*T.*)];

2.º otros libros y artículos importantes sobre el intuicionismo.

En A. Heyting [1955] se encuentra una bibliografía casi completa del intuicionismo hasta 1951.

ACZEL, P.H.G.

1966. "Saturated intuitionistic theories". H.A. Schmidt *et al.* (eds.), pp. 1–11.

ASHVINIKUMAR

1966. *Hilbert spaces in intuitionism.* Tesis doctoral, Amsterdam.
1969. "Uber katalogisierte Räume". *Compositio Math.* 21. pp. 431–456.
1969A. "The intuitionist contradictority of certain classical set-theoretic results". *Nieuw Archief Wiskunde* (3) 17, pp. 218-222.
1970. "On the intuitionist theory of Stieltjes integration and its applications." *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* Ser. A 73 = *Indag. math.* 32, pp. 62–76.
1970A. "On Brouwer-Stieltjes integration". *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* Ser. A 73 = = *Indag. Math.* 32, pp. 161–171.
A. "Een ander bewijs van de intuïtionistische strijdigheid van het keuze-axioma". En prensa.

BELINFANTE, M.J.

1931. "Die Hardy-Littlewoodsche Umkohrung des Abelschen Stetigkeitssatzen in der intuitionistischen Mathematik". *Proc. Akad. Amsterdam* 34, p. 401–412.
1941. "Elemente der intuitionistischen Funktionentheoric". Proe, Akad, Amsterdam 44, pp. 173–185, 276–285, 420–425, 563–567, 711–717.

BETH, E.W.

1947. "Semantical considerations on intuitionistic mathematics". *Proc, Akad, Amsterdam* 50, pp. 1246–1251 = *Indagationes math.* 9, pp. 572–577.
1948. *Weijsbegeerte der wiskunde,* 2.ª ed. Amberes y Nimega.
1955. *Les fondements logiques des mathématiques,* 2.ª ed. París y Lovaina.
1956. "Semantic construction of intuitionistic logic". *Mededelingen Akad, Amsterdam* N.R. 19, n.º 11.
1957. "Remarks on elementary predicate logic". *Nieuw Archief Wiskunde* (3) 5, pp. 58-62.
1958. "Construction sémantique de la logique intuitionniste". *Le raisonnement en inathematiques et en Sciences expérimentales* (Colloques internationaux du C.N.R.S. LXX). París, pp. 77-84.
1959. "Remarks on intuitionistic logic". A. Heyting (ed.) pp. 15-25.
1959A. "Considérations heuristiques sur les méthodes de déduction par séquences". *Logique et analyse* 2, pp. 153–159.
1960. "Completeness results for formal systems". *Proc. Intern. Congress Math. 1958,* Nueva York, pp. 281–288.
1962. "Logique inférentieele et logique bivalente de l'implication". *Bull. Soc. Math. Belge* 14, pp. 120–132.

BOURBAKI, N.

1948. *L'Architecture des mathématiques.* Ed. Cahiers du Sud, 1948.
1949. "Foundations of mathematics for the working mathematician". *J. Symbolic Logic* 14, pp. 1–8.

BROUWER, L.E.J.

1907. *Over de grondslagen der wiskunde.* Tesis doctoral, Amsterdam.
1908. "De onbetrouwbaarheid der logische principes" *Tijdschrift voor wijsbegeerte* 2. (Recogido en [L.E.J. Brouwer 1919]).
1912. *Intuitionisme en formalisme.* Groningen 1912. (Traducción inglesa [L.E.J. Brouwer 1913]).
1913. "Intuitionism and formalism". *Bull. Amer. Math. Soc.* 20, pp. 81–96.
1918. "Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil". *Verhandelingen Akad. Amsterdam* 12, N.° 5.
1919. *Wiskunde, waarheid, werkelijkheid.* Groningen 1919.
1919A. "Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Zweiter Teil" *Verhandelingen Akad. Amsterdam* 12, N.° 7.
1919B. "Intuitionistische Mengenlehre". *Jahresbericht deutsch. Math. Ver.* 28, pp. 203–208 = *Proc. Akad. Amsterdam* 23, pp. 949–954.
1920. "Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung? " *Proc. Akad. Amsterdam* 23, pp. 955–965.
1923. "Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten". *Verhandelingen Akad. Wet. Amsterdam* 13, N.° 2.
1924. "Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik I". *Mathematische Annalen* 93, pp. 244–258.
1924A. "Uber die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie". *J. reine angew. Math.* (Crelle) 154, pp. 1–8.
1924B. "Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist". *Proc. Akad. Amsterdam* 27, pp. 189–194.
1924C. "Intuitionistische Ergänzung des Fundamentalsatzes der Algebra". *Proc. Akad. Amsterdam* 27, pp. 631–634.
1924D. "Bomerkungen zum Beweise der gleichmässigen Stetigkeit voller Funktionen". *Proc. Akad. Amsterdam* 27, pp. 644–646.
1925. "Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe". *Jahresbericht deutsch. Math. Ver.* 33. pp. 251–256.
1925A. "Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik II". *Math Annalen* 95, pp. 453–473.
1925B. "Intuitionistischer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes". *Proc. Akad. Amsterdam* 28, pp. 503–506.
1926. "Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik III". *Math. Annalen* 96, pp. 451–489.
1926A. "Uber Definitionsbereiche von Funktionen". *Math. Annalen* 97, pp. 60–76.
1926B. "Intuitionistische Einführung des Dimensionsbegriffes". *Proc. Akad. Amsterdam* 29, pp. 855–864.
1926C. "Die intuitionistische Form des Heine–Borelschen Theorems". *Proc. Akad. Amsterdam* 29, pp. 866–868.
1927. "Virtuelle Ordnung und unerweiterbare Ordnung". *J. Reine angew. Math.* (Crelle) 157, pp. 255–258.
1927A. "Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus". *Proc. Akad. Amsterdam* 31, pp. 374–379 = *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. Berlin* 1927, pp. 48–52.
1927B. "Beweis dass jede Menge in einer individualisierten Menge enthalten ist". *Proc. Akad. Amsterdam* 31, pp. 380–381.
1928. *Die Struktur des Kontinuums.* Viena 1928.
1929. "Mathematik, Wissenschaft und Sprache". *Monatshefte Math. Phys.* 36, pp. 153–164.
1933. "Weten, Willen, Spreken". *Euclides* 9, pp. 177–193.
1942. "Zum Freien Werden von Mengen und Funktionen". *Proc. Akad. Amsterdam* 45, pp. 322–323 = Indagationes math. 4, pp. 107–108.

1942A. "Die repräsentierende Menge der stetigen Funktionen des Einheitskontinuums". *Proc. Akad. Amsterdam* 45, pp. 443 = *Indagationes math.* 4, pp. 154.
1947. "Richtlijinen der intuitionistische wiskunde". *Proc. Akad. Amsterdam* 50, p. 339 = *Indagationes math.* 9, pp. 197.
1948. "Consciousness, philosophy and mathematics". *Proc. Xth intern. Congress Philosophy* (Amsterdam 1948). pp. 1235–1249.
1948A. "Essentieel negatieve eigenschappen". *Proc. Akad. Amsterdam* 51, pp. 963–965 = *Indagationes math.* 10, pp. 322–324.
1948B. "Opmerkingen over het beginsel van het uitgesloten derde en over negatieve asserties". *Proc. Akad. Amsterdam* 51, pp. 1239–1244 = *Indagationes math.* 10, pp. 383–388.
1949. "De non-aequivalentie van de constructieve en de negatieve orderelatic in het continuum". *Proc. Akad. Amsterdam* 52, pp. 122–125 = *Indagationes math.* 11, pp. 37–40.
1949A. "Contradictoriteit der elementaire meetkunde". *Proc. Akad. Amsterdam* 52, pp. 315–316 = *Indagationes math.* 11, pp. 89–90.
1950. "Remarques sur la notion d'ordre". *Comptes rendus Acad. Sci. París* 230, pp. 263–265.
1950A. "Sur la possibilité d'ordonner le continu". *Comptes rendus Acad. Sci. París* 230, pp. 349–350.
1951. "On order in the continuum, and the relation of truth to non contradictority". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser, A 54, pp. 357–359 = *Indagationes math.* 13, pp. 357–359.
1952. "Historical background, principles and methods of intuitionism". *South-African J. Sci.* 49, pp. 139–146.
1952A. "An intuitionist correction of the fixed-point theorem on the sphere". *Proc. Royal Soc, London* A 213, pp. 1–2.
1952B. "Over accumulatiekernen van oneindige kernsoorten". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A 55, pp. 439–442 = *Indagationes math.* 14, pp. 439–442.
1952C. "Door klassieke theorema's gesignaleerde pinkernen die envindbaar zijn". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A 55 pp. 443-445 = *Indagationes math.* 14, pp. 443–445.
1954. "Points and spaces". *Canadian J. math.* 6, pp. 1–17.
1954A. "Ordnungswechsel in Bezug auf eine coupierbare geschlossene stetige Kurve". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A 57, pp. 112–114 = *Indagationes math.* 16, pp. 112–114.
1954B. "Intuitionistische differentieerbaarheid". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser A 57, pp. 201–204 = *Indagationes math.* 16, pp. 201–204.
1954C. "An example of contradictority in classical theory of functions". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A 57, pp. 204–206 = *Indagationes math.* 16, pp. 204–206.
1954D. "Addenda en corrigenda over de rol van het principium tertii exclusi in de wiskunde". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A 57, pp. 104–105 = *Indagationes math.* 16, pp. 104–105.
1954E. "Nadere addenda en corrigenda over de rol van het principium tertii exclusi in de wiskunde". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A 57, pp. 109–111 = *Indagationes math.* 16, pp. 109–111.
1955. "The effect of intuitionism on classical algebra of logic". *Proc. Roy. Irish Acad.* Sect. A 57, pp. 107–112.

BROUWER, L.E.J. en B. DE LOOR.
1924. "Intuitionistischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra". *Proc. Akad. Amsterdam* 27, pp. 186–188.

BULL, R.A.
1965. "A modal extension of intuitionistic logic". *Notre Dame J. Formal Logic* 6, pp. 142–146.
1966. "MIPC as the formalisation of an intuitionist concept of modality". *J. Symbolic Logic* 31, pp. 609–616.

CARNAP, R.
1934. *Logische Syntax der Sprache.* Viena 1934.

1937. *The logical syntax of language.* Londres, Routledge & Kegan Paul, 1937.

CORPUT, J.G. VAN DER.

1946. "On the fundamental theorem of algebra". *Proe, Akad. Amsterdam* 49, pp. 722–732, 878–886, 985–994 = *Indagationes math.* 8 pp. 430–440, 549–557, 605–614.

CURRY, H.B.

1951. *Outlines of a formalist philosophy of mathematics.* Amsterdam, North-Holland, 1951.

DALEN, D. VAN

1963. "Extension problems in intuitionistic plane projective geometry". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A 66, pp. 349–383 = *Indagationes math.* 25, pp. 349–383.
1968. "A note on spreed cardinals". *Compositio Math.* 20, p. 21–28.
1968A. "Reducibilities in intuitionistic topology". *J. Symbolic Logic,* 33, pp. 412-417.

DALEN, D. VAN y A.S. TROELSTRA

1968. "Proyections of lawiess sequences". J. Myhill, *et al.* (eds.), pp. 163–186.

DANTZIG, D. VAN.

1942. "On the affirmative content of Peano's theorem on differential equations". *Proc. Akad. Amsterdam* 45, pp. 367–373 = *Indagationes math.* 4, pp. 140–146.
1942A. "A remark and a problem concerning the intuitionistic form of Cantor's intersection theorem". *Proc. Akad. Amsterdam* 45, pp. 374–375 = *Indagationes math.* 4, pp. 147–148.
1947. "On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics". *Proc. Akad. Amsterdam* 50, pp. 918–929, 1092–1103 = *Indagationes math.* 9, pp. 429–440, 506–517.
1949. "Comments on Brouwer's theorem on essentially-negative predicates". *Proc. Akad. Amsterdam* 52, pp. 949–957 = *Indagationes math.* 11, pp. 347–355.

DESTOUCHES, J.–L.

1951. "Sur la mecánique classique et l'intuitionnisme". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A 54, pp. 74–79 = *Indagationes math.* 13, pp. 74–79.

DIEUDONNÉ, J.

1949. "L'axiomatique dans les mathématiques modernes". *Congrès intern. de philosophie des sciences, París, 1949.* (Actualités scientifiques et industrielles 1137, París, Hermann, 1951.)

DIJKMAN, J.G.

1948. "Recherche de la convergence négative dans les mathématiques intuitionnistes". *Proc. Akad. Amsterdam* 51, pp. 681–692 = *Indagationes math.* 10, pp. 232–243.
1952. *Convergentie en divergentie in de intuitionistische wiskunde.* Tesis doctoral, Amsterdam.
1961. "On Markov chains and intuitionism I". *Proc. Akad. Amsterdam* 64, pp. 314–327 = *Indagationes math.* 23, pp. 314–327.
1963. "On Markov chains and intuitionism II". *Proc. Akad. Amsterdam* 66, pp. 275–281 = *Indagationes math,* 25, p. 275–281.
1964. "On Markov chains and intuitionism III". *Proc. Akad. Amsterdam* 67, pp. 256–261 = *Indagationes math.* 26, pp. 256–261.

DRAGALIN, A.G.

1971. "Constructive Mathematics and Models of Intuitionistic Theories". P. Suppes *et al.* (eds.), pp. 11–128.

DUBISLAV, W.

1932. *Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart.* Berlín 1932.

FITTING, M.

1968. "Intuitionistic model theory and the Cohen independence proofs". J. Myhill *et al.* (eds.), pp. 219–226.

FREUDENTHAL, H.

1936. "Zum intuitionistische Raumbegriff". *Compositio math.* 4, pp. 82–111.

1936A. "Zur intuitionistischen Deutung logischer Formein". *Compositio math.* 4, pp. 112–116.

GHOSE, A.

1968. "Free choice sequences I, II". *Automation in language, translation and theorem proving* (P. Braffort and F. van Scheepen, eds.), Bruselas, Commission of the European Communities, 1968, pp. 245–257, 259–261.

GIBSON, C.G.

1967. *The Radon integral in intuitionism.* Tesis doctoral, Amsterdam.

1969. "The intuitionist measure", *J. London Math. Soc.* 44, pp. 617–624.

GILMORE, P.

1953. "The effect of Griss' criticism of the intuitionistic logic on deductive theories formalized within the intuitionistic logic. "*Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A 56, pp. 162–187 = *Indagationes math,*. 15, pp. 162–187.

GLIVENKO, V

1928. "Sur la logique de M. Brouwer". *Bull. Acad. Sci. Belg.* 1928, p. 225–228.

1929. "Sur quelques points de la logique de M. Brouwer". *Bull. Acad. Sci. Belg.* 1929, pp. 183–188.

GÖDEL, K.

1932. "Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie". *Ergebnisse eines math. Kolloquiums (Wien),* Heft 4, pp. 34–38.

1932A. "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls". *Ergebnisse eines math. Kolloquiums (Wien),* Heft 4, pp. 39–40.

1958. "Uber eine bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes". *Dialectica* 12, pp. 280–287.

GOODMAN, N.D.

1968. *Intuitionistic arithmetic as a theory of constructions.* Tesis doctoral, Stanford University.

1968A. "A theory of constructions equivalent to arithmetic", J. Myhill *et al.* (eds.) pp. 121–150.

GOODSTEIN, R.L.

1956. A constructivist theory of plane curves. *Fundamenta math.* 43, pp. 23–35.

1954. "Logic-free formalizations of recursive arithmetic". *Math. Scand.* 2, pp. 247–261.

1957. *Recursive number theory,* Amsterdam, North-Holland.

1961. *Recursive analysis.* Amsterdam, North-Holland.

GRISS, G.F.C.

1944. "Negatieloze intuitionistische wiskunde". *Verslagen Akad, Amsterdam* 53, pp. 261–268.

1946. *Idealistische Filosofie. Een humanistische levens- en wereldbe- schouwing.* Arnhem.

1946A. "Negationless intuitionistic mathematics I". *Proc. Akad. Amsterdam* 49, pp. 1127–1133 = *Indagationes math.* 8, pp. 675–681.

1948. "Over de negatie". (*Feestbundel, aangeboden aan H. J. Pos*) Amsterdam.
1948A. "Mathématiques, mystique et philosophie". *(Mélanges philosophiques. Bibliothèque du Xième Congrès intern. de philosophie*) Amsterdam.
1949. "Logique des mathématiques intuitionnistes sans négation". *Comptes rendus Acad. sci. París* 227, pp. 946–947.
1950. "Negationless intuitionistic mathematics II". *Proc. Akad. Amsterdam* 53, pp. 456–463 = *Indagationes math.* 12, pp. 108–115.
1950A. "The logic of negationless intuitionistic mathematics". *Proc. Akad Amsterdam* Ser. A. 54, pp. 41–49 = *Indagationes math.* 13, pp. 41–49.
1951. "Negationless intuitionistic mathematics III, IV". *Proc. Akad. Amsterdam* 54 Ser. A, pp. 193–200, 452–471 = *Indagationes math.* 13, pp. 193–200, 452–471.
1955. "La mathématique intuitioniste sans négation". *Nieuw Archief voor wiskunde* (3) 3, pp. 134–142.

GRZEGORCZYK, A.

1964. "A philosophically plausible formal interpretation of intuitionistic logic". *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* Ser. A. 67 = *Indag. Math.* 26, pp. 596–601.

HARROP, R.

1956. "On disjunctions and existential statements in intuitionistic systems of logic". *Math. Annalen* 132, pp. 347–361.
1960. "Concerning formulas of the types $A \rightarrow B \vee C$, $A \rightarrow (Ex)B(x)$ in intuitionistic formal systems". *J. Symbolic Logic* 25, pp. 27–32.

HENKIN, L.

1953. "Some interconnections between modern algebra and mathematical logic". *Trans. Amer. math. soc.* 74, pp. 410–427.

HEYTING, A

1925. "Intuitionistische axiomatiek der projectieve meetkunde". Tesis doctoral, Amsterdam y Groningen.
1927. "Die Theorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies mit nichtkommutativer Multiplikation". *Math. Annalen* 98, pp. 465–496.
1927A. "Zur intuitionistischen Axiomatik der projektiven Geometrie". *Math. Annalen* 98, pp. 491–538.
1929. "De telbaarheidepraedicaten van Prof. Brouwer". *Nieuw Archief voor wiskunde* (2) 16, pp. 47-58.
1930. "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik". *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. Berlín* 1930, pp. 42–56.
1930A. "Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik". *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. Berlín* 1930, pp. 57-71, 158–169.
1934. *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie.* (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete) Berlín 1934.
1935. "Intuitionistische wiskunde". *Mathemativa B* (Leiden) 4, pp. 72–82, 123–136; 5, pp. 62–80, 105–112; 7, pp. 129–141.
1936. "Bemerkungen zu dem Aufsatz von Herrn Freudenthal: "Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln"." *Compositio math.* 4, pp. 117–118.
1941. "Untersuchungen über intuitionistische Algebra". *Verhandelingen Akad. Amsterdam*, 1. sectie 18 N.° 2.
1946. "On weakened quantification". *J. Symbolic Logic* 11, 119–121.
1950. "Espace de Hilbert et intuitionnisme". *Les méthodes formelles en axiomatique. (Colloques internationaux du C.N.R.S.) París, 1953, pp. 59–63.*
1951. "Note on the Riesz–Fischer theorem". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A 54, pp. 35–40 = *Indagationes math.* 13, pp. 35–40.
1952. "Logique et intuitionnisme" *(Actes du 2e colloque intern. de logique math).* París, 1954, pp. 75–82.
1953. "Sur la théorie intuitionniste de la mesure". *Bull. soc. math. Belg.* 6, pp. 70–78.
1955. *Les fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration.* París y Lovaina, Nauwelaerts, 1955.

1958. "La théorie élémentaire de l'intégration en mathématiques intuitionistes". *Le raisonnement en mathématiques et en sciences expérimentales* (Colloques internationaux du C.N.R.S. LXX) París.
1958A. "Blick von der intuitionistischen Warte". *Dialectica* 12, pp. 332–345.
1959. "Some remarks on intuitionism". A. Heyting. (ed.), pp. 69–71.
1959A. "Axioms for intuitionistic plane affine geometry". *The Axiomatic Method,* with special reference to Geometry and Physics, Proc. Intern. Symposium, Berkeley 1957. (L. Henkin, P. Suppes y A. Tarski, eds.). Amsterdam, North-Holland, pp. 160–173.
1959B. "Infinitistic methods from a finitist point of view". *Infinitistic methods,* Proc. Symposion Warsaw 1959, Varsovia, pp. 185–192.
1960. Remarques sur le constructivisme. *Logique et analyse* 3, pp. 177–182.
1961. "Axiomatic method and intuitionism". *Essays on the foundations of mathematics* Jerusalem, pp. 237–247.
1962. "Méthodes et problèmes de l'intuitionnisme". *Annales Faculté Sci. Clermont* N° 7, pp. 101–106.
1962A. "After thirty years". E. Nagel *et al.* (eds.) pp. 194–197.
1964. "Remarques sur la théorie intuitionniste des espaces linéaires". *E. W. Beth memorial colloquium, París, 1964* (J. L. Destouches, ed.), Dordreeht, Reidel, 1967.
1968. "Recent progress in intuitionistic analysis". J. Myhill *et al.* (eds.), pp. 95–100.

HEYTING, A. (ed.)

1959. *Constructivity in Mathematics,* Proc. Colloq., Amsterdam 1957. Amsterdam, North-Holland.

HILBERT, D.

1922. "Neubegründung der Mathematik". *Abhandl. mat. Seminar Hamburg. Univers.* 1, pp. 157–177.

HILBERT, D. y W. ACKERMANN.

1949. *Grundzüge der theoretischen Logik.* 3.ª ed. Berlin, Göttingen y Heidelberg, Springer 1949 [vers. cast. de la 4.ª ed. alemana, 1959: *Elementos de lógica teórica,* Madrid, Tecnos, 1962.]

HOMAGK, F.

A. "Intuitionistische Kennzeichnung der endlichen Spezies". En prensa.

HOWARD, W.A.

1968. "Functional interpretation of bar induction by bar recursion". *Compositio Math.* 20, pp. 107–124.

HOWARD, W. A. y G. KREISEL

1966. "Transfinite induction and bar induction of types zero and one, and the role of continuity in intuitionistic analysis". *J. Symbolic Logic* 31, pp. 325–358.

IONGH, J. J. DE.

1948. "Restricted forms of intuitionistic mathematics". *Proc. Xth intern. congress philosophy* (Amsterdam 1948), pp. 744–748.

JOHANSSON, I.

1936. "Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus". *Compositio math.* 4, pp. 119–136.

JONGH, D.H.J. DE

1968. "A characterization of the intuitionistic propositional calculus". J. Myhill *et al.* (eds.), pp. 211–218.

KLEENE, S. C.

1952. *Introduction to metamathematics.* Nueva York y Amsterdam-Groningen, Van Nostrand y North-Holland. Traducción española, *Introducción a la Matemetamática,* Ed. Tecnos, Madrid.

1952.A. "Recursive functions and intuitionistic mathematics". *Proc. Intern. Congr. Math. Cambridge (Mass.) 1950,* Cambridge 1952, pp. 679–685.

1962. "Disjunction and existence under implication in elementary intuitionistic formalisms". *J. Symbolic Logic* 27, pp. 11–18. Addendum: ibid. 28, pp. 154–156.

1967. "Constructive functions in "The foundations of intuitionistic mathematics"." B. van Rootselaar y J. F. Staal (eds.), pp. 137–144.

KLEENE, S.C. y R.E. VESLEY.

1965. *The foundation of intuitionistic mathematics,* Amsterdam, North-Holland, 1965.

KOLMOGOROFF, A.

1932. "Zur Deutung der intuitionistischen Logik". *Math. Zeitschrift* 35, pp. 58–65.

KREISEL, G.

1958. "Elementary completeness properties of intuitionistic logic with a note on negations of prenex formulae". *J. Symbolic Logic* 23, pp. 317–330.

1958A. "A remark on free choice sequences and the topological completeness proofs". *J. Symbolic Logic* 23, pp. 369–388.

1958B. "Non-derivability of $\neg(x)A(x) \rightarrow (\exists x)\neg A(x), A(x)$ primitive recursive, in intuitionistic formal systems". *J. Symbolic Logic* 23, pp. 456–457.

1959. "Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite types". A. Heyting, (ed.), pp. 101–128.

1960. "Foundations of intuitionistic logic". E. Nagel *et al.* (eds.), pp. 198–210.

1962. On weak completeness of intuitionistic predicate logic. *J. Symbolic Logic* 27, pp. 139–158.

*1963. "Report on the Seminar on Foundations of Analysis, Section IV: Theory of free choice sequences of natural numbers". Documento multicopiado, Stanford.

1965. "Mathematical Logic". T. L. Saaty (ed.), *Lectures on modern mathematics III,* New York-London-Sydney, pp. 95–195.

1965A. "Informal rigour and completeness proofs". *Problems in the philosophy of mathematics,* Proc. Intern. Colloq., London 1965 (I. Lakatos, ed.), Amsterdam North-Holland, 1967, p. 138–171.

1967. "Functions, ordinals, species". B. van Rootselaar and J. F. Staal (eds). pp. 145–159.

1968. "Lawless sequences of natural numbers". *Compositio Math.* 20, pp. 222–248.

1968A. "Church's thesis: a kind of reductibility axiom for constructive mathematics". J. Myhill *et al.* (eds.), pp. 121–150.

KREISEL, G. y H. PUTNAM

1957. "Eine Unableitbarkeit-beweismethode für den intuitionistischen Aussagenkalkül". *Archiv Math. Logik Grundlagenforsch.* 3, pp. 74–78.

KREISEL, G. y A.S. TROELSTRA

1970. "Formal systems for some branches of intuitionistic analysis". *Annals math. logic* 1, pp. 229–387.

KRIPKE, S. A.

1963. "Semantical considerations on modal and intuitionistic logic". *Acta Philosophica Fennica* 16, pp. 83–94.

1963A. "Semantical analysis of intuitionistic logic I." *Formal systems and recursive functions,* Proc. Eighth Logic Colloq., Oxford 1963 (J. N. Crossley y M. A. E. Dummett, eds.), Amsterdam, North-Holland, 1965, pp. 92–130.

KURODA, S.

1951. "Intuitionistische Untersuchungen der formalistischen Logik". *Nagoya math. J.* 2, pp. 35–47.

LAUCHLI, H.

1968. "An abstract notion of realizability for which intuitionistic predicate calculus is complete". J. Myhill *et al.* (eds.), pp. 227-234.

LERDA, F.

1959. "Analisi critica dei fondamenti dell' intuizionismo". *Rendiconti Sem. mat. Univ. e Politec. Torino* (1959–1960), pp. 121–218.

LOOR, B. DE.

1925. *Die hoofstelling van die algebra van intuisionistiese standpunt.* Tesis doctoral, Amsterdam.

MCKAY, C. G.

1967. "A note on the Jaskowski sequence". *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 13, pp. 95–96.

MANNOURY, G.

1947. *Les fondements psycholinguistiques des mathématiques.* Neuchâtel 1947.

MARTIN–LÖF, P.

*1971. "Hauptsatz for intuitionistic Simple Type Theory". P. Suppes *et al.* (eds.), pp. 279–290.

MEDVEDEV, YU. T.

1966. "Interpretation of logical formulas by means of finite problems". *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 169, pp. 20–23. Traducción (al inglés): Soviet Math. Dokl. 7, pp. 857–860.

MENGER, K.

1930. "Der Intuitionismus". *Blätter deutsch. Philosophie* 4, pp. 311–325.

MOSCHOVAKIS, J. R.

1965. "Disjunction and existence in formalized intuitionistic analysis". *Sets, models and recursion theory,* Proc. Summer School Math. Logic and Tenth Logic Colloq. Leicester 1965 (J. N. Crossley, ed.), Amsterdam, North-Holland, 1967, pp. 309–331.

MYHILL, J.

1966. Notes towards an axiomatization of intuitionistic analysis. *Logique et Analyse* (N.S.) 9, pp. 280–297.

1967. "Formal systems of intuitionistic analysis 1", B. van Rootselaar y J. F. Staal (eds.), pp. 101–178.

*1967A. "The Formalization of Intuitionism". *Contemporary Philosophy. A Survey-I. Logic and Foundations of Mathematics / La philosophie contemporaine. Chroniques-I. Logique et Fondements des Mathématiques* (R. Klibansky, ed.), Florencia, La Nuova Italia, 1968, pp. 324–341.

1968. "Forinal systems of intuitionistic analysis II: the theory of species", J. Myhill *et al.* (eds.), pp. 151–162.

MYHILL, J., A. KINO y R. E. VESLEY (eds.)

1970. *Intuitionism and Proof Theory,* Proc. Summer Conf. Buffalo N.Y. 1968. Amsterdam y Londres, North-Holland.

NAGEL, E., P. SUPPES y A. TARSKI (eds.)

1962. *Logic, Methodology and Philosophy of Science,* Proc. 1960 Intern. Congress, Stanford, S. Univ. Press.

NEUMANN, J. VON.

1929. "Allgemeine Eigenwerttheorie Hormitescher Funktionaloperatoren". *Math. Annalen* 102, pp. 49–131.

PIL'CAK, B. YU.

1952. "Ob isčislenii zadač" (Sobre el cálculo de problemas). *Ukrainskiĭ mat. žurnal* 4, pp. 174–194.

PORTE, J.

1958. "Une propriété du calcul propositionnel intuitionniste". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A 61, pp. 362–365 = *Indagationes math.* 20, pp. 362–365.

RASIOWA, H. y R. SIKORSKI.

1959. "Formalisierte intuitionistische elementare Theorieen". A. Heyting (ed.), pp. 241–249.

1963. *The mathematics of metamathematics.* Varsovia.

ROBINSON, ABRAHAM.

1951. *On the metamathematics of algebra.* Amsterdam, North-Holland, 1951.

ROOTSELAAR, B. VAN.

1952. "Un problème de M. Dijkman". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A, 55, p. 405–407 = = *Indagationes math.* 14, pp. 405–407.

1954. *Generalization of the Brouwer integral.* Tesis doctoral, Amsterdam.

1955. "On the mapping of spreads". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A, 58, pp. 557–563 = = *Indagationes math.* 17, pp. 557–563.

1955A. "Generating schemes for full mappings". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A, 58, pp. 646–649 = *Indagationes math.* 17, pp. 646–649.

1956. "A remark on Brouwermeasurable functions". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A 59, pp. 579–580 = *Indagationes math.* 18, pp. 579–580.

1960. "On intuitionistic difference relations". *Proc. Akad. Amsterdam* Ser. A 63, pp. 316–322 = *Indagationes math.* 22, pp. 316–322. Correctiones: *Proc. Akad., Amsterdam* Ser A 66, pp. 132–133 = *Indagationes math.* 25, pp. 132–133.

1964. "On intuitionistic notions of divergence and convergence". *Nieuw Arch. Wiskunde* (3) 12, pp. 19–24.

1968. "On subjetive mathematical assertions". J. Myhill *et al.* (eds.), pp. 211–218.

ROOTSELAAR, B. VAN, y J.F. STAAL (eds.)

1968. *Logic, Methodology and Philosophy of Science III,* Proc. Third Intern. Congress, Amsterdam 1967. Amsterdam y Londres, North-Holland.

ROSENBLOOM, P. C.

1964. "Konstruktive Aequivalente für Sätze aus der klassischen Analysis". *Proc. 2.e Intern. Congress Internat. Union Philosophy of Science, Zurich 1954,* 11, pp. 135–137.

ROUSSEAU, G.

1968. "Sheffer funetions in intuitionistic logic". *Z. Math, Logik Grundlagen Math.* 14, pp. 279–282.

SCHMIDT, H.A., K. SCHÜTTE y H.–J. THIELE (eds.)

1968. *Contributions to Mathematical Logic,* Proc. Logic Colloq., Hannover 1966. Amsterdam, North-Holland.

SCHRÖTER, K.

1956. "Über den Zusammenhang der in den Implikationsaxiomen vollständigen Axiomensysteme des zweiwertigen mit denen des intuitionistischen Aussagenkalküls". *Zeitschr. Math. Logik Grundlagen Math.* 2, pp. 173–176.

1957. "Eine Umformung des Heytingschen Axiomensystems für den intuitionistischen Aussagenkalkül". *Zeitschr. Math. Logik Grundlagen Math.* 3, pp. 18–29.

SCHULTZ, K.

1966. "Zur Darstellung der intuitionistischen Mathematik im Rahmen eines Beweisbarkeitskalküls". *Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin* 8, pp. 399–402.

1967. "Spreadtheorie und intuitionistische Topologie". *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 13, pp. 251–264.

1967A. "Speziestheorie unf intuitionistische Topologie". *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 13, pp. 377–378.

SCHÜTTE, K.

1962. "Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikatenlogik". *Math. Annalen* 148, pp. 192–200.

1966. "Zur Semantik der intuitionistischen Aussagenlogik". H. A. Schmidt *et al.* (eds.), pp. 231–235.

1968. *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik.* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, tomo 42). Berlin–Heidelberg–New York, Springer.

SCOTT, D.

1968. "Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis". J. Myhill *et al.* (eds.), pp. 235–255.

SIKORSKI, R.

1959. Der Heitingsche Prädikatenkalkül und metrische Räume. A. Heyting (ed.) pp. 250–253.

SKOLEM, TH.

1958. "Remarks on the connection between intuitionistic logic and a certain class of lattices". *Math. Scand.* 6, pp. 231–236.

SPECTOR, C.

1962. "Provably recursive functionals of analysis: A consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics". *Recursive function theory* (Proc. Symposia pure math. 5) pp. 1–27.

STONE, M.H.

1932. *Linear transformations in Hilbert space.* Nueva York 1932.

SUPPES, P., L. HENKIN, A. JOJA y G. G. MOISIL (eds.)

*1972. *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV,* Proc. Fourth Intern. Congress, Bucharest 1971. Amsterdam y Londres, North-Holland, 1973.

TAIT, W.W.

1967. "Intensional interpretations of functionals of finite type I." *J. Symbolic Logic* 32, pp. 198–212.

TARSKI, A.

1950. "Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics". *Proc. Intern. Congress Math. 1950,* Cambridge de Mass., pp. 705–720.

TEENSMA, E.

1954. "The intuitionistic interpretation of analysis". *Proc. 2.^{e} internat. Congress Internat. Union Philosophy of Science, Zurich 1954, II* pp. 144–150.

THOMASON, R.H.

1968. "On the strong semantical completeness of the intuitionistic predicate calculus". *J. Symbolic Logic* 33, pp. 1–7.

TROELSTRA, A. S.

1966. *Intuitionistic general topology*. Tesis doctoral, Amsterdam.
1966A. "The use of 'Brouwer's principle' in intuitionistic topology". H. A. Schmidt *et al.* (eds.), pp. 289–298.
1967. "Intuitionistic continuity". *Nieuw Archief Wiskunde* (3) 15, pp. 2–6.
1967A. "Finite and infinite in intuitionistic mathematics". *Compositio Math. 18*, pp. 94–116.
1967B. "The theory of choice sequences". B. van Rootselaar and J. F. Staal (eds.) pp. 201–223.
1968. "New sets of postulates for intuitionistic topology". *Compositio Math.* 20, pp. 211–221.
1968A. "One-point compactifications of intuitionistic locally compact spaces". *Fundamenta Math.* 57, pp. 75–93.
1969. *Principles of intuitionism.* (Lecture notes in mathematics 95). Berlin–Heidelberg–New York 1969.
1969A. "Notes on the intuitionistic theory of sequences I". *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.* 72 = *Indagationes math.* 31, pp. 430–440.
1970. "Notes on the intuitionistic theory of sequences II, III". *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.* 73 = *Indagationes math.* 32, pp. 99–109, 246–252.
1970A. "Informal theory of choice sequences". *Studia Logica* 25, pp. 31–54.

VALPOLA, V.

1955. "Ein System der negationslosen Logic mit ausschliesslich realisierbaren Prädikaten". *Acta philos. Fennica* 9, pp. 1–247.

VESLEY, R. E.

1968. "A palatable substitute for Kripke's schema". J. Myhill *et al.* (eds.), pp. 211–218.

VOROB'EV, N. N.

1958. "A new algorithm of derivability in the constructive propositional calculus". *Trudy Mat. Inst. Steklov* 52, pp. 193–225.

VREDENDUIN, P. G. J.

1953. "The logic of negationless mathematics". *Compositio math.* 11, pp. 204–277.

WEYL, H.

1919. "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik". *Math. Zeitschr.* 10, pp. 39–79.
1924. "Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik". *Math. Zeitschr.* 20, pp. 131–150.

INDICE DE MATERIAS

Abanico, 53 *n* 4, 54
  teorema del, 54
Abierto/a, 70
Acotado/a en número, 57, 133
Adyunción, 111
Antecesor, 50
– inmediato, 43
Axiomas de Peano, 23

Bolzano-Weierstrass, teorema de, 57, 133

Cálculo mínimo, 116
Campo, 59
Canónico/a:
  generador – de número, 50
  generador puntual – 67
  despliegue – de gp, 67
Casi lleno/a, 83
Casi por doquier, 83
Clausura, 69
  punto de –, 69
Coincidencia:
  de generadores de número, 26
  de números reales con generadores de número, 46
  de especies de gp, 67-68
  en sentido débil, 127
Compleción, 88
Complemento de región, 71
– – medible, 80
Componente, 44
Congruencia de especies, 47
Conjunto elemental de rectángulos, 70
Continuación, 50
Continuo, 46
Contradicción, 112
Contrastado/a, 129
Convergente:
  negativamente –, 122
  positivamente –, 39
  sucesión de funciones –, 89
Conyunción, 111
c.p.d., *véase* Casi por doquier:
Cubrimiento simple, 71

Débil:
  dependencia –, 64
  generador – de número real, 127
  número real –, 127
Débilmente mayor, 127
Dependencia, 64
  débil, 64
  fuerte, 64
Descendiente, 50
  inmediato, 43
Desgajable, subespecie, 47
Desigualdad entre generadores de número, 26

Despliegue, 43
  de gp, *véase* Generador puntual, despliegue de desnudo, 45
  elemento de un –, 44
  finitario, 44
  ley de –, 43
Despreciable, 83
Determinante característico, 62
Distancia:
  entre puntos, 68
  entre un punto y una especie puntual, 74
Dominio:
  de una función, 85
  elemental, 70
  – racional, 70
  – – exterior, 70
Dualmente explotable, 45

Elemento de un despliegue, 44
Enumerable, 48
Equivalente, 48
Escindirse, 47
Especie(s), 46
  congruentes, 47
  – geométricamente, 68
  de despliegue, 46
  puntuales, 56, 67
  – clausuradas, 69
  derivada, 69
  equivalentes, 48
  miembro de una –, 46

Finito/a, 48
Fuerte, dependencia, 64
Función:
  acotada medible, 84
  característica, 91
  medible, 97
  racional, 31
  sumable, 99, 101

Generador(es):
  de número real, 26
  – – canónicos, 50
  – – débiles, 127
  – – idénticos, 26
  puntual, 67
  – canónico, 67
  –, despliegue de, 67-68
  –, especie de, 67-68
Geométricamente congruentes, 68
gp, *véase* Generador puntual.

Heine-Borel, teorema de, 77

Igualdad:
  de elementos de despliegues, 44

de despliegues, 44
de especies, 46-47
de números naturales, 24
Implicación, 112
Independiente, 64
Inextensible, 122
Infinito/a, 48
numerable, 48
Integral, 84, 99, 101-102
Intervalo cerrado, 49
Inversa, 29-30

Ley:
complementaria, 43, 44
de despliegue, 43
Límite, 39
punto –, 69

Máximo, 35
Medible:
complemento de región –, 80
función –, 97
– acotada –, 84
especie puntual –, 91
región –, 79
Medida:
de un complemento de región, 80
de un dominio elemental o una región, 79
de una especie puntual, 91
Menge, 45
Menor principal, 62
Metafunción, 105
Miembro de una especie, 46
Mínimo, 35

Negación, 27-28, 72, 112
Negativamente convergente, 122
No negativa, parte, 89
No oscilante, 123
No positiva, parte, 89
Número:
natural, 23
real, 46
– débil, 127
– respetable, 37

Orden:
parcial, relación de, 119
virtual, relación de, 121

Parte no negativa, 89
Parte no positiva, 89
Positivamente convergente, 39, 122
Pseudo orden, relación de, 120
Punto, 67
de clausura, 69
límite, 69
reticular, 75
– admisible, 75
– inadmisible, 75

Rango, 61
Región, 70, 71
medible, 79
Relación:
de orden, 34, 119
– parcial, 119
– virtual, 121
de pseudo orden, 120
de separación, *véase* Separados.
Representar, 46
Respetable, número real, 37
Riesz-Fischer, teorema de, 105-106

Segmento, 50
Separados:
en un campo, 59
en un espacio de Hilbert, 103-104
generadores de número –, 28
puntos –, 68
Set, 45
Situado/a, 74
Species, 46
spi, *véase* Sucesión que se prolonga infinitamente.
Spread, 45
Subespecie, 46-47
desgajable, 47
Sucesión:
admisible, 43, 44
de Cauchy, 25, 42
inadmisible, 43
que se prolonga infinitamente, 41
Sumable, 101

Tipo, 46-47
Tira aproximadora, 84
Traba, 51
Trabado/a, 51

Valor absoluto, 36
Vectores, 64-65, 103-104
libres, 65
– en un espacio de Hilbert, 103-104

GLOSARIO DE SIMBOLOS

$1 \to n$	24	$\overset{*}{\cup}$	73
$>$, $<$	24, 34	$\varrho(p, Q)$	74
$\neq$	26	$\varkappa_n$-cuadrados	81
$\#$	28, 59, 68	$f^+(x)$, $f^-(x)$	89
$a+b$, ab, $-a$, a^{-1}	30	$f_Q(x)$	91
$\not>$, $\not<$	35	${}_kf(x)$	98
$\lvert a \rvert$	36	$\approx$	105
Λ_M	43	$\wedge$, $\vee$	111, 112
Γ_M	43	$\neg$	72, 112
$\in$, $\notin$, $\cup$, $\cap$	47	$\to$	113
$\subseteq$	47	$(\forall x)$	116
$[a, b]$	49	$(\exists x)$	116
$\lvert x-y \rvert$	68	$\succ$, $\prec$	120, 121
$R(V)$, $\alpha(V)$	70	$^-\lim$	122
$R^*(V)$, $\alpha^*(V)$	70	$\supset$, $\forall$	126
		$\doteq$	127

EL autor dice en el Prefacio: «Una de las finalidades de este libro es la de capacitar a los matemáticos en activo para que solventen la cuestión de cuáles de los resultados que obtengan pueden demostrarse intuicionísticamente; pues el intuicionismo sólo podrá florecer si los matemáticos que trabajan en los distintos campos llegan a interesarse activamente por él y a hacerle aportaciones: para edificar una rama determinada de la matemática intuicionista es necesario, en primer término, poseer un conocimiento a fondo de la rama correspondiente de la matemática clásica, y en segundo, saber por experiencia dónde se encuentran los piélagos intuicionistas. En la presente obra trato de enseñar esto último; y espero que algunos de mis lectores se ocupen de los detalles más satisfactoriamente de lo que yo podría hacerlo, o que traten intuicionisticamente otras teorías. El objeto de las «lecturas recomendadas» es el de ayudarles, ya que indican los trabajos intuicionistas más importantes acerca de algunos temas especiales».